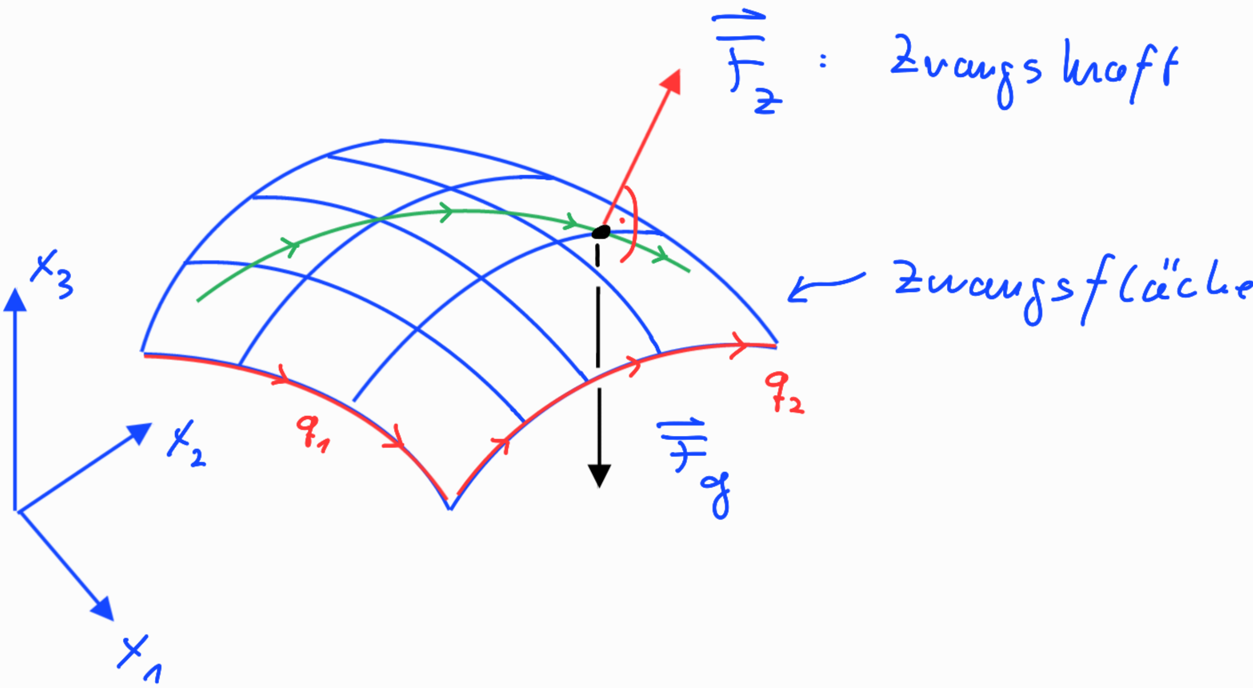
Lagrangesche Mechanik

<u>alternative</u> Formulierung der Newt. Mechanik mittels <u>Wirkungsfunktional</u> und <u>Hamiltonschen Prinzips</u>, sehr hilfreich bei <u>Bewegung unter Zwangsbedingungen</u>:



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = ?$$

$\longrightarrow$ <u>verallgemeinerte Koordinaten</u>

$$\vec{q} = (q_1, q_2)$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_g + \vec{F}_z(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

?

$$\ddot{\vec{q}}(t) = ?$$

Lagrange-Gleichungen!

benötigen etwas <u>Variationsrechnung</u>:

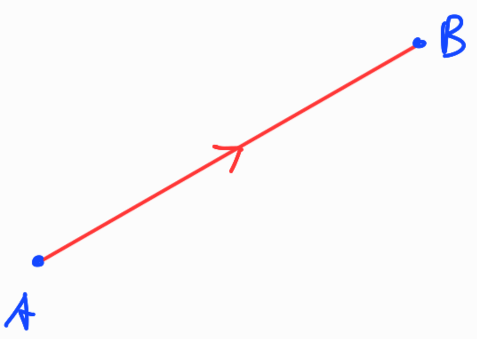
Funktional, Lagrange-Funktion, Euler-Lagrange-Gleichungen

Beispiel:

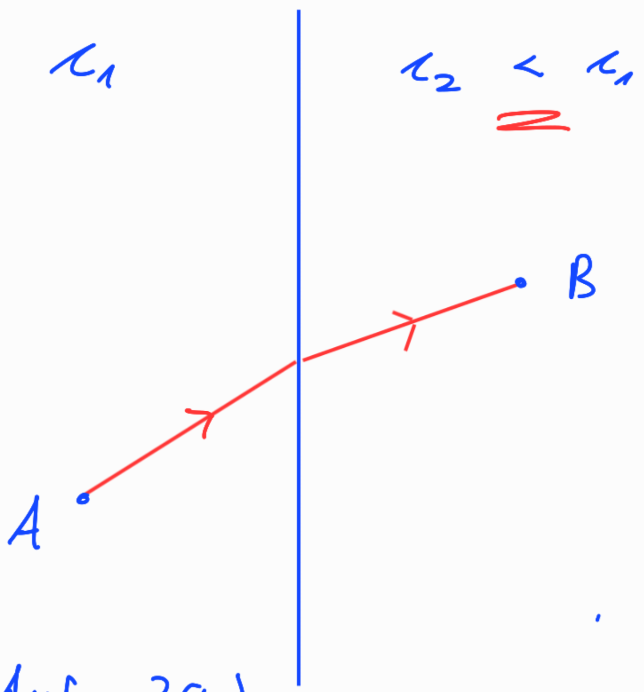
<u>Fermatsches Prinzip</u>

Ein Lichtstrahl zwischen Punkten A und B nimmt immer den <u>schnellsten</u> Weg, d.h. den Weg <u>kürzester Laufzeit</u>.

a) $n = \underline{\text{konst.}}$

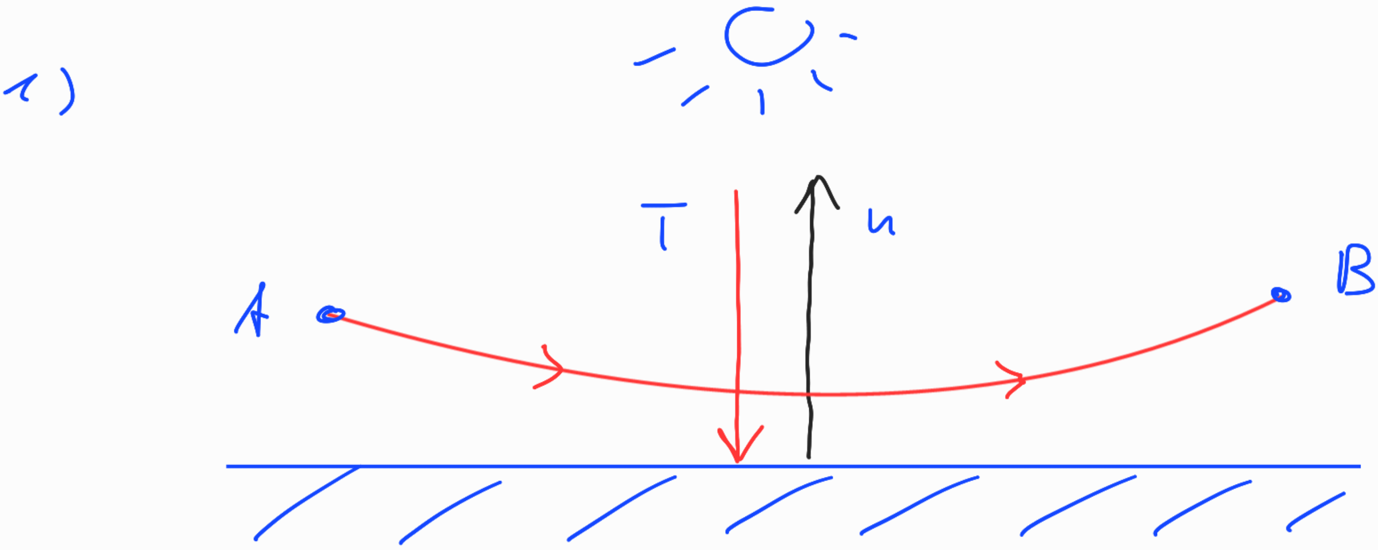


b)



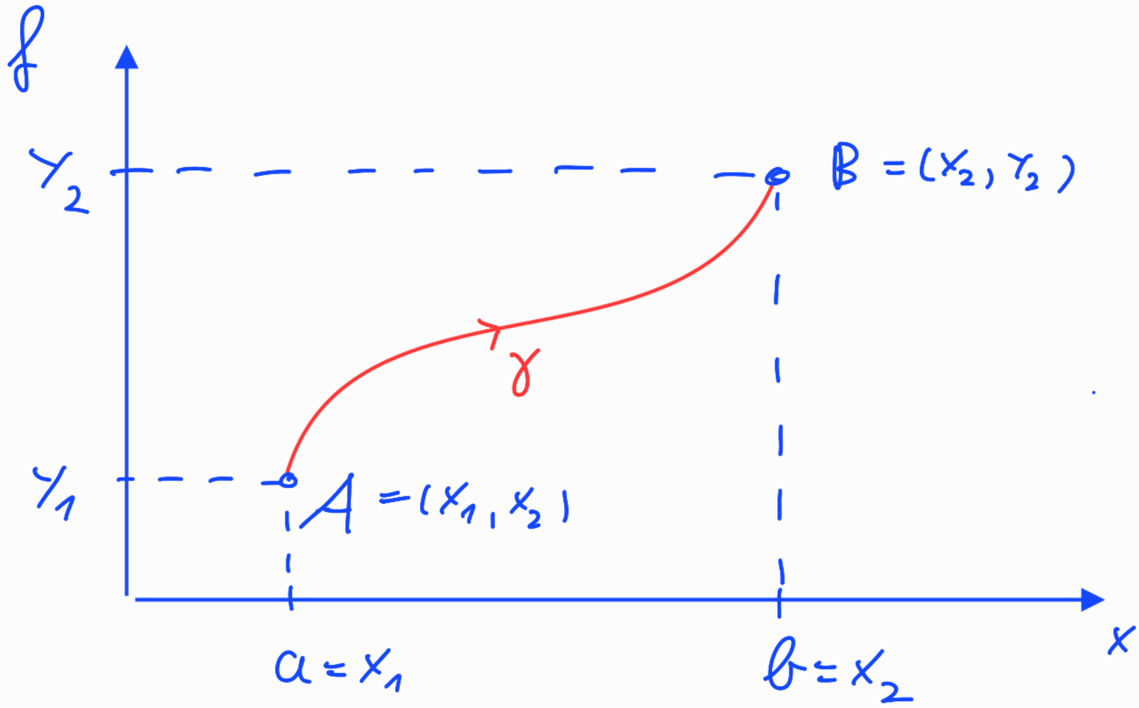
(vgl. Aufg. 20.)

1)



(vgl. Aufgabe 21.)

beschreibe Weg γ des Lichtstrahls durch Graph einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:

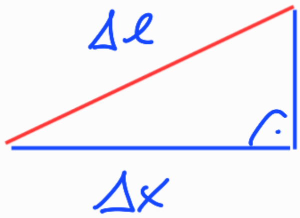


<u>Randbedingungen</u> : $f(a) = y_1$, $f(b) = y_2$

Laufzeit T des Lichts von A nach B längs γ:

$$T = \int_\gamma \frac{dl}{c} = \int_a^b \frac{1}{c(x,f(x))}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

im allg. <u>orts abhängige</u> Lichtgeschw.



$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x \quad \rightsquigarrow \quad \Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\rightsquigarrow \Delta l = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$= \Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

d.h. $dl = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

Laufzeit T ist ein <u>Funktional</u>:

$$T : \underline{\text{Funktion}}\ f \longmapsto T[f] = \int_a^b \cdots\, dx$$

zu lösendes Problem:

finde Funktion $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass $T[f_0]$ minimal!

(unter Randbed. $f_0(a) = y_1$, $f_0(b) = y_2$)

etwas allgemeiner:

Funktional

$$S : f \longmapsto S[f] := \int_a^b L(f(x), f'(x), x)\, dx$$

mit Lagrange-Funktion

$$L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, f', x) \longmapsto L(f, f', x)$$

Aufgabe: finde $S[f]$ minimierende Funktion $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ unter Randbedingung $f(a) = y_1$, $f(b) = y_2$

notwendige Bedingung für f_0 minim. Fkt. von $S[f]$?

Annahme: $S[f]$ minimal für $f = f_0$!

$\rightarrow$ jede Variation von $f_0(x)$ um $\eta(x)$ zu

$$f(x) = f_0(x) + \eta(x)$$

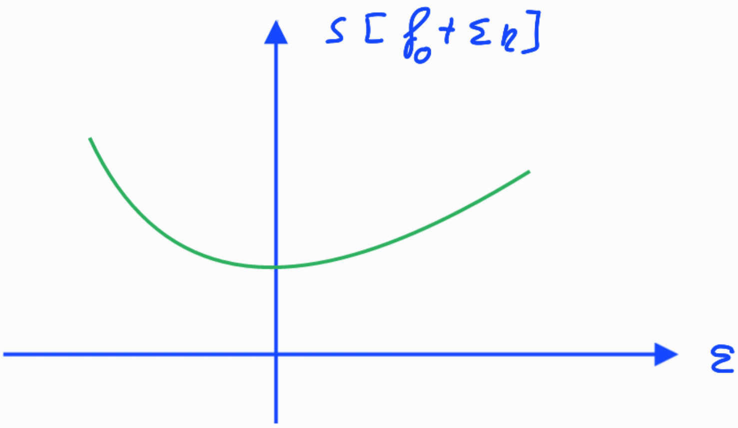
vergrößert $S[f]$, (mit $\eta(a) = 0$

(*) $\eta(b) = 0$)

d.h. Funktion

$$\varepsilon \longmapsto S[f_0 + \varepsilon\eta]$$

besitzt Minimum bei $\varepsilon = 0$:



d.h. $\boxed{0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\varepsilon} S[f_0 + \varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0}}$ für alle Variationen $\eta(x)$ mit R.B. (*)

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{d\varepsilon} S[f_0 + \varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L(f_0(x) + \varepsilon\eta(x), f_0'(x) + \varepsilon\eta'(x), \cancel{x})\, dx \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f}(f_0(x), f_0'(x))\, \underline{\eta(x)}\, dx + \underbrace{\int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}(f_0(x), f_0'(x))\, \underline{\eta'(x)}\, dx}_{\overset{\text{P.I.}}{=}}$$

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial f'}(f_0(x), f_0'(x))\,\eta(x)\Big|_a^b}_{\overset{\eta(a)=\eta(b)=0}{=}\ 0} - \int_a^b \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}(f_0(x), f_0'(x))\right)\underline{\eta(x)}\, dx$$

$$\rightarrow \quad 0 = \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial f}(f_0(x), f_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}(f_0(x), f_0'(x)) \right\} \underline{\eta(x)}\, dx$$

da Integral für <u>alle</u> $\eta(x)$ verschwindet

folgt $\{ \dots \} = 0$, d. h.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}(f_0(x), f_0'(x)) = \frac{\partial L}{\partial f}(f_0(x), f_0'(x))}$$

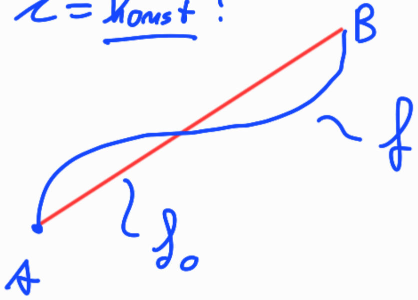
<u>Euler-Lagrange-Gleichung</u> $\quad = \quad$ <u>notwendige Bedingung</u>

für $S[f] = \int_a^b L(f(x), f'(x), x)\,dx$

minimal / maximal / stationär in f_0 !

Beispiel a)

c = konst !



$$T[f] = \frac{1}{c_0}\int_a^b L(f(x), f'(x))\,dx$$

mit $L(f,f') = \sqrt{1+f'^2}$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\partial L}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}$$

$\rightsquigarrow$ E.-L.-G. zur Best. von $f_0(x)$:

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial f}(f_0(x), f_0'(x))}_{=0} \overset{!}{=} \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}(f_0(x), f_0'(x))$$

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dx}\frac{f_0'(x)}{\sqrt{1-f_0'(x)^2}}$$

d.h. $$0 \overset{!}{=} \frac{f_0''}{\sqrt{\dots}} - \frac{f_0'^2 f_0''}{\sqrt{\dots}^3} = f_0''(x)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1+f_0'(x)^2}^3}\right)}_{\neq 0}$$

$\rightsquigarrow f_0''(x)=0 \rightsquigarrow f_0(x) = \alpha + \beta x$ Gerade ✓