
Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)
2. Übung

Sommersemester 2019

Abgabe bis Mittwoch, den 17.04.2019, 11:00 Uhr in den entsprechenden Briefkästen vor dem Eingang des Instituts für Theoretischen Physik.

5. Zur Diskussion

- a) Was ist ein hermitesches Skalarprodukt?
- b) Angenommen, es stünde Ihnen ein *einziges* Silberatom zur Verfügung, und Sie wüssten, dass dieses Atom entweder im Zustand ψ_+ ($z+$ polarisiert) oder im Zustand ϕ_+ ($x+$ polarisiert) präpariert ist. Können Sie durch ein einziges Stern-Gerlach-Experiment mit Sicherheit entscheiden, in welchem Zustand sich das Atom vor dem Experiment befand? Hilft es Ihnen weiter, wenn Sie beliebig viele Stern-Gerlach-Experimente an dem Atom ausführen dürften? Wie sieht es aus, wenn Sie statt einem nun zehn Silberatome bekommen, und diese zehn Atome entweder alle im Zustand ψ_+ oder alle im Zustand ϕ_+ präpariert sind?

6. Zustandsvektoren I (2+3+2+3)

Es seien ψ_1 und ψ_2 zwei orthonormale Zustandsvektoren eines quantenmechanischen Systems. Zwei weitere Zustände seien durch

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} \psi_1 + i \psi_2 \right) \quad \text{und} \quad \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\psi_1 - \sqrt{2} i \psi_2 \right)$$

gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass ϕ_1 und ϕ_2 ebenfalls orthonormale Zustandsvektoren sind.
- b) Bestimmen Sie $\langle \phi_1, \psi_1 \rangle$, $\langle \psi_2, \phi_1 \rangle$, $\langle \psi_1, \phi_1 \rangle$, $\|\phi_1 + \phi_2\|$, und $\|\phi_1 + i\phi_2\|$.
- c) Eine Messung prüfe das Vorliegen des Zustands ϕ_1 . Mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergibt die Messung ein positives Ergebnis, wenn sich das System in den Zuständen ϕ_1 , ϕ_2 , ψ_1 oder ψ_2 befindet?

- d) Wir betrachten nun einen Strahl $x+$ polarisierter Silberatome. Der quantenmechanische Zustand ψ_+ dieser Atome kann bekanntlich als Superposition $z+$ und $z-$ polarisierter Atome gemäß $\phi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ + \psi_-)$ aufgefasst werden. Jemand möchte diesen Zustand folgendermaßen interpretieren:

“Die Atome befinden sich zufällig entweder im Zustand ψ_+ oder im Zustand ψ_- , jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit $1/2$. Von N Atomen sind daher im Mittel $N/2$ im Zustand ψ_- , in Übereinstimmung mit den Resultaten einer μ_z -Messung.”

Was ist Ihrer Meinung nach richtig oder falsch an dieser Interpretation?

7. Hermitesches Skalarprodukt

(2+3+2+3)

Es sei $\mathcal{B} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d\}$ eine Orthonormalbasis eines d -dimensionalen Hilbertraumes \mathcal{H} . Weiterhin seien ψ und χ zwei Vektoren aus \mathcal{H} mit den Komponenten $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}$ bzw. $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{C}$,

$$\psi = \sum_{i=1}^d a_i \phi_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \chi = \sum_{i=1}^d b_i \phi_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \quad (1)$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- $a_i = \langle \phi_i, \psi \rangle$
- $\langle \psi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^d a_i^* b_i$
- $|\langle i \psi, \chi \rangle|^2 = |\langle \psi, \chi \rangle|^2$
- $\|\psi\|^2 = \sum_{i=1}^d |a_i|^2$

8. Zustandsvektoren II

(3+4+3)

Im Rahmen des Stern-Gerlach-Experimentes können zwei Zustände der Silberatome durch die beiden Vektoren

$$\chi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ \pm i \psi_-) \quad (2)$$

beschrieben werden. Hierbei seien ψ_{\pm} die Zustandsvektoren für z_{\pm} polarisierte Atome.

- Zeigen Sie, dass χ_{\pm} eine Orthonormalbasis bilden.
- Wie können die Zustände χ_{\pm} durch die Ihnen ebenfalls bekannten Zustände für x_{\pm} polarisierte Atome ausgedrückt werden?

- c) Interpretieren Sie die Zustände χ_{\pm} bezogen auf das Stern-Gerlach-Experiment, indem sie bspw. die Messwahrscheinlichkeiten bzgl. x_{\pm} und z_{\pm} betrachten.