
Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)
4. Übung

Sommersemester 2019

Abgabe bis Mittwoch, den 08.05.2019, 11:00 Uhr in den entsprechenden Briefkästen vor dem Eingang des Instituts für Theoretischen Physik.

14. Zur Diskussion

- Wie lautet die Schrödingergleichung für ein quantenmechanisches System mit Hamilton-Operator H ? Was ist der dazugehörige Zeitentwicklungsoperator?
- Was versteht man unter einer *Erhaltungsgröße* eines quantenmechanischen Systems?
- Was ist ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür, dass die Größe A eine Erhaltungsgröße ist?

15. Zeitentwicklungsoperator

(2+3+2+3)

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators $U(t)$:

- $U(0) = 1$ und $U(t_1)U(t_2) = U(t_1 + t_2)$.
- $U^{-1}(t) = U(-t)$, $U^\dagger(t) = U(-t)$ und $U^\dagger(t)U(t) = \mathbb{1}$.
- $\langle \phi(t) | \chi(t) \rangle = \langle \phi(0) | \chi(0) \rangle$.
- A ist Erhaltungsgröße genau dann wenn $U^\dagger(t) A U(t) = A$.

16. Zeitentwicklung in einem Drei-Zustands-System

(1+3+6)

Wir betrachten ein Drei-Zustands-System, in dem der Hamilton-Operator die Eigenwerte $E_0 = -\epsilon$, $E_1 = 0$ und $E_2 = \epsilon$ zu den Eigenvektoren $|\phi_0\rangle$, $|\phi_1\rangle$ und $|\phi_2\rangle$ besitzt. Ferner sei eine Größe $A = ia(|\phi_2\rangle \langle \phi_1| - |\phi_1\rangle \langle \phi_2|)$, wobei a reell, gegeben.

- Wie lautet der Zeitentwicklungsoperator in der Energieeigenbasis?

- b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|\psi_0\rangle = |\phi_2\rangle$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das System zu $t > 0$ im Zustand $|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle$ bzw. $|\phi_2\rangle$? Bestimmen Sie den Erwartungswert von A bei einer Messung zur Zeit $t > 0$.
- c) Nun befinde sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}(|\phi_0\rangle + i|\phi_1\rangle - \sqrt{2}|\phi_2\rangle)$. Wie lauten jetzt die Wahrscheinlichkeiten für das Vorliegen der Zustände $|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ und der Erwartungswert von A zur Zeit $t > 0$?

17. Erhaltungsgrößen

(5+3)

Ein quantenmechanisches System werde durch den Hamilton-Operator

$$H = iE(|\chi\rangle\langle\varphi| - |\varphi\rangle\langle\chi|)$$

beschrieben, wobei $|\chi\rangle$ und $|\varphi\rangle$ zwei orthonormale Zustände des Systems seien. E sei eine reelle Größe der Dimension Energie.

- a) Welche der folgenden Größen sind Erhaltungsgrößen?

$$A_1 = a_1 |\varphi\rangle\langle\varphi|, \quad A_2 = a_2 |\chi\rangle\langle\chi|, \quad A_3 = ia_3 (|\varphi\rangle\langle\chi| - |\chi\rangle\langle\varphi|), \\ A_4 = a_4 (|\chi\rangle\langle\varphi| + |\varphi\rangle\langle\chi|).$$

a_1, \dots, a_4 seien reelle Konstanten.

- b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand

$$(i) \quad |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\chi\rangle + |\varphi\rangle) \quad \text{bzw.} \\ (ii) \quad |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\chi\rangle + i|\varphi\rangle)$$

Bestimmen Sie für beide Fälle jeweils $\langle A_3 \rangle_{\psi(t)}$ für Zeiten $t > 0$.