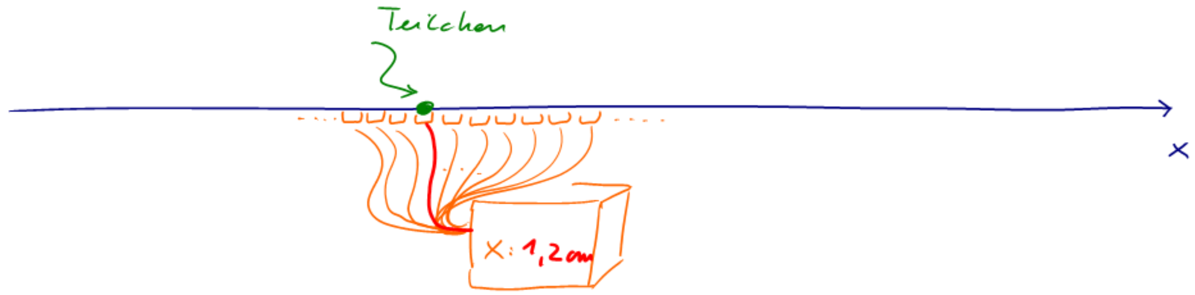
Quantenmechanik eines Punktteilchens

(in einer Dimension, später mehr)



idealisierte Vorstellung:

Ortskoordinate X des Teilchens ist physikalische Größe mit kontinuierlichen Messwerten $x \in \mathbb{R}$ $\quad\hat{=}\quad$ herm. Operator X mit kontinuierlichen Eigenwerten $x \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ orthonormale Eigenzustände

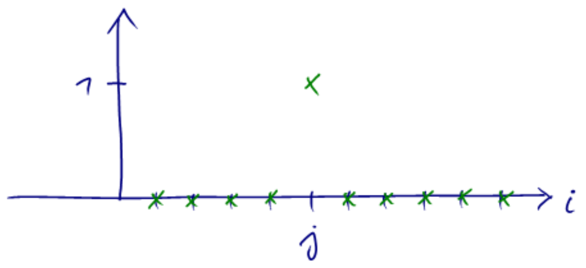
$$B = \{ |\varphi_x\rangle \}_{x \in \mathbb{R}}$$

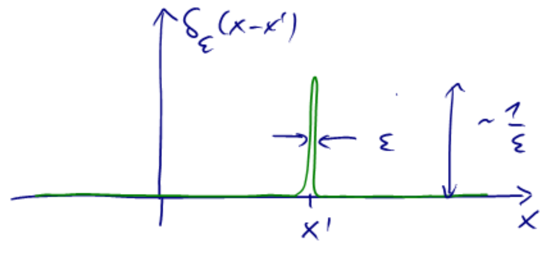
Kontinuum an Eigenwerten x und Eigenzuständen $|\varphi_x\rangle$ erfordert geeignete Notation (tatsächlich: geeignete Mathematik), die wir uns in Analogie zur bisherigen erschließen:

alt: diskrete Basis	neu: kontinuierliche Basis
$|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$	$\{ |\varphi_x\rangle \}_{x \in \mathbb{R}}$

Orthonormalität

$\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$	$\langle \varphi_x | \varphi_{x'} \rangle = \delta(x - x')$





„Deltafunktion" (Dirac):

(i) $\delta(x) \overset{!}{=} 0$ für $x \neq 0$

(ii) $\int_{-a}^{+a} \delta(x)\, dx \overset{!}{=} 0$ $(a > 0)$

Vollständigkeit

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \mathbb{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\varphi_x\rangle\langle\varphi_x| = \mathbb{1}$$

→

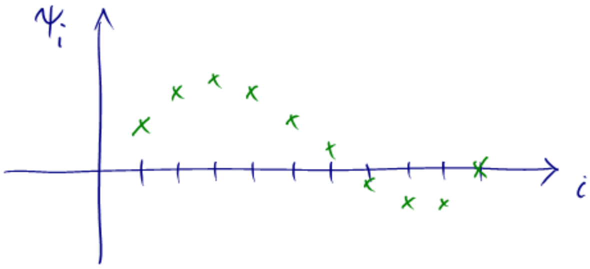
Basisdarstellung

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i\rangle\underline{\underline{\langle\varphi_i|\psi\rangle}}$$

Komponente von $|\psi\rangle$ bzgl. $|\varphi_i\rangle$:

$$\boxed{\psi_i := \langle\varphi_i|\psi\rangle}$$

d.h. $|\psi\rangle = \sum_i \psi_i\, |\varphi_i\rangle$

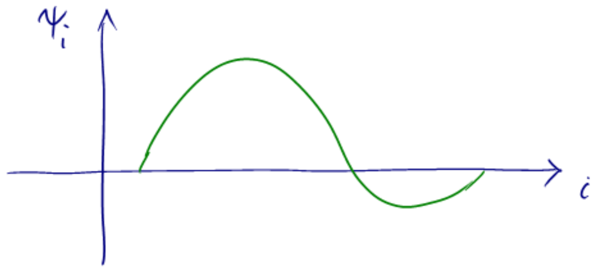


$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int dx\, |\varphi_x\rangle\underline{\underline{\langle\varphi_x|\psi\rangle}}$$

Wellenfunktion von $|\psi\rangle$ bei x:

$$\boxed{\psi(x) := \langle\varphi_x|\psi\rangle}$$

d.h. $|\psi\rangle = \int dx\, \psi(x)\, |\varphi_x\rangle$



Skalarprodukt

$$\underline{\underline{\langle\psi|\chi\rangle}} = \langle\psi|\mathbb{1}|\chi\rangle$$

$$= \sum_i \langle\psi|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\chi\rangle$$

$$= \underline{\underline{\sum_i \psi_i^* \chi_i}}$$

$$\underline{\underline{\langle\psi|\chi\rangle}} = \langle\psi|\mathbb{1}|\chi\rangle$$

$$= \int dx\, \langle\psi|\varphi_x\rangle\langle\varphi_x|\chi\rangle$$

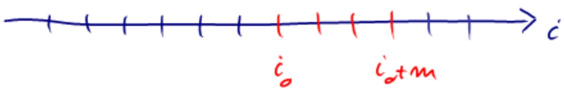
$$= \underline{\underline{\int dx\, \psi^*(x)\, \chi(x)}}$$

Norm

$$\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = \sum_i |\psi_i|^2$$

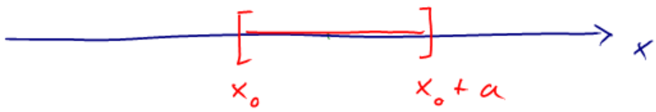
$$\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = \int dx \; |\psi(x)|^2$$

Bornsche Regel



Wkt, dass System im Zust. $|\varphi_{i_0}\rangle$ oder $|\varphi_{i_0+1}\rangle$ oder .... $|\varphi_{i_0+m}\rangle$:

$$p = \sum_{i=i_0}^{i_0+m} |\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2 = \sum_{i=i_0}^{i_0+m} |\psi_i|^2$$



Wkt, dass Teilchen am Ort $x \in [x_0, x_0+a]$:

$$p = \int_{x_0}^{x_0+a} dx \; |\langle\varphi_x|\psi\rangle|^2 = \int_{x_0}^{x_0+a} dx \; |\psi(x)|^2$$

$\rightarrow$ $|\psi(x)|^2$ = <u>Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte</u>

(Born)

<u>Beispiele</u> :

1) $|\psi\rangle = |\varphi_{x_0}\rangle$ besitzt Wellenfunktion $\psi(x) \equiv \langle\varphi_x|\varphi_{x_0}\rangle = \delta(x-x_0)$

2) $\chi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\sigma^2} e^{ikx}$ ist Wellenfkt. des <u>normierten</u> Zustands $|\chi\rangle$: $\|\chi\|^2 = \int |\chi(x)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int dx \; e^{-x^2/2\sigma^2} = 1$

3) $\langle\chi|\psi\rangle \overset{1),2)}{=} \int dx \; \chi(x)^* \delta(x-x_0) = \chi^*(x_0)$

Quantenmechanischer Impuls

Impuls p des Teilchens ist physikalische Größe;

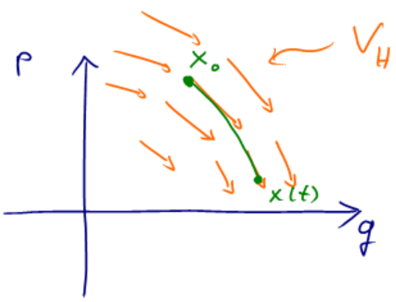
Wie lautet der entsprechende hermitesche Operator?

zur Beantwortung dieser Frage bemühen wir wieder

Hamiltonsche Mechanik:

a) Hamilton-Fkt $H(q,p)$ ist Erzeuger der Zeitentwicklung:

(≡ „Translation in der Zeit")



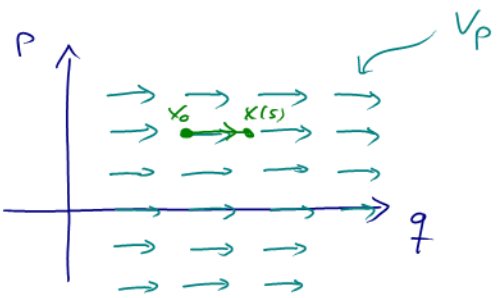
Hamilt. VF

$$V_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

$\rightarrow$ Dynamik: $\dfrac{dx(t)}{dt} \overset{!}{=} V_H(x(t))$

$\rightarrow$ $x_0 \xrightarrow{t} x(t)$

b) Impuls p ist Erzeuger der Translation:



$$V_p = \left(\frac{\partial p}{\partial p}, -\frac{\partial p}{\partial q} \right) = (1,0)$$

$\rightarrow$ „Dynamik": $\dfrac{dx(s)}{ds} \overset{!}{=} V_p(x(s)) = (1,0)$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{dq}{ds} = 1, \ \dfrac{dp}{ds} = 0$ $\rightarrow$ $x_0 \equiv (q_0, p_0) \xrightarrow{s} (q_0 + s, p_0)$

analog definieren wir in der Quantenmechanik:

a) <u>Hamilton-Operator H</u> ist Erzeuger des <u>Zeitentwicklungsoperators</u>:

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$$

d.h. genau: $$\boxed{H \overset{!}{=} i\hbar \frac{d}{dt} U(t)\Big|_{t=0}}$$

b) <u>Impuls-Operator P</u> ist Erzeuger des <u>Translationsoperators</u> $T(a)$, def. durch

$$T(a)|\varphi_x\rangle \overset{!}{=} |\varphi_{x+a}\rangle ,$$

d.h. genau $$\boxed{P := i\hbar \frac{d\,T(a)}{da}\Big|_{a=0}}$$

→ Wirkung auf <u>Wellenfunktion</u>:

$$\boxed{\psi(x) \xrightarrow{P} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi(x)}$$

denn:

$$|\psi\rangle = \int dx\, \psi(x)\, |\varphi_x\rangle$$

$$\rightarrow \quad P|\psi\rangle = i\hbar \frac{d}{da} T(a)|\psi\rangle\Big|_{a=0} = i\hbar \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\, T(a)|\varphi_x\rangle$$

$$= i\hbar \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\, |\varphi_{x+a}\rangle = i\hbar \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x-a)\, |\varphi_x\rangle \Big|_{a=0}$$

$$= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \underbrace{\frac{d}{da}\psi(x-a)\Big|_{a=0}}_{= -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x)} |\varphi_x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \boxed{\left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}(x)\right)} |\varphi_x\rangle .$$