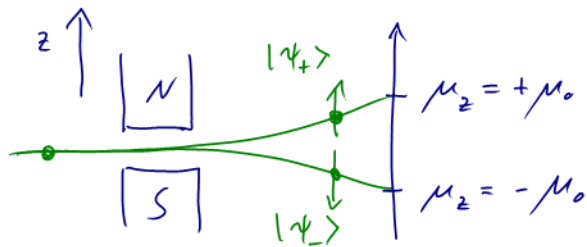


Postulate der Quantenmechanik

- Vorbereitung: physikalische Größen und
  hermitesche Operatoren (im S.-G.-Exp.)
- Zustands- und Messpostulat
- Quantenmechanische Dynamik

Physikalische Größen und hermitesche Operatoren

am Beispiel eines Stern-Gerlach-Magneten im $\hat{z}$ -Ausrichtung:



$\hat{=}$

Messgerät für physikalische Größe (Observable)
 μ_z

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_z = +\mu_0 \\ \mu_z = -\mu_0 \end{array} \right.$$

$\longleftrightarrow$ Zustand
 $\longleftrightarrow$ " "

$$\left\{ \begin{array}{l} |\psi_+\rangle \\ |\psi_-\rangle \end{array} \right.$$

(1)

Messwerte, reell

Zustände, orthonormal

hermitescher Operator:

(zur physik. Größe μ_z)

$$\hat{\mu}_z := +\mu_0 |\psi_+\rangle\langle\psi_+| - \mu_0 |\psi_-\rangle\langle\psi_-|$$

Operator $\hat{\mu}_z$ erlaubt bequeme Berechnung des Erwartungswerts $\langle \mu_z \rangle_{|\psi\rangle}$ der Größe μ_z bei Messung an Atom im Zustand $|\psi\rangle$:

Messwert $+\mu_0$ mit Wkt $p_+ = |\langle \psi_+ | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \psi_+ \rangle \langle \psi_+ | \psi \rangle$
 " " $-\mu_0$ " " $p_- = |\langle \psi_- | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \psi_- \rangle \langle \psi_- | \psi \rangle$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Erwartungswert } \langle \mu_z \rangle_{|\psi\rangle} &= p_+ \mu_0 + p_- (-\mu_0) = \\ &= \mu_0 \langle \psi | \psi_+ \rangle \langle \psi_+ | \psi \rangle - \mu_0 \langle \psi | \psi_- \rangle \langle \psi_- | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \left(\underbrace{\mu_0 |\psi_+\rangle \langle \psi_+| - \mu_0 |\psi_-\rangle \langle \psi_-|}_{\hat{\mu}_z} \right) | \psi \rangle \end{aligned}$$

d.h.

$$\langle \mu_z \rangle_{|\psi\rangle} \stackrel{!}{=} \langle \psi | \hat{\mu}_z | \psi \rangle$$

[allg.:

Größe $A \rightarrow$ herm. Op. $\hat{A}$

$$\hookrightarrow \langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad]$$

Postulate der Quantenmechanik

(P1) Zustandsraum $\equiv$ komplexer Vektorraum mit
hermiteschem Skalarprodukt $\langle \dots, \dots \rangle$
(" Hilbertraum $\mathcal{H}$ ")

Zustand $\hat{=}$ normierter Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

(P2) Messung und Zustandspräparation

Eine physikalische Größe A mit möglichen Mess-
werten $a_1, a_2, \dots, a_n$ in Eigenzuständen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$
entspricht hermiteschem Operator $\hat{A}$ mit Eigen-
werten $a_1, a_2, \dots, a_n$ zu orthonormalen Eigenvektoren
 $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$; d.h.

$$\hat{A} = \sum_{\lambda=1}^n a_{\lambda} |\varphi_{\lambda}\rangle \langle \varphi_{\lambda}|$$

Eigenvektor $\equiv$ Eigenzustand

Eigenwert = möglicher Messwert der Größe A

- Messung von A an System im Zustand $|\psi\rangle$ ergibt mit Wahrscheinlichkeit $p_i = |\langle \varphi_i | \psi \rangle|^2$ den Messwert a_i (Bornsche Regel).

→ Erwartungswert der Größe A bei Messung im Zustand $|\psi\rangle$:

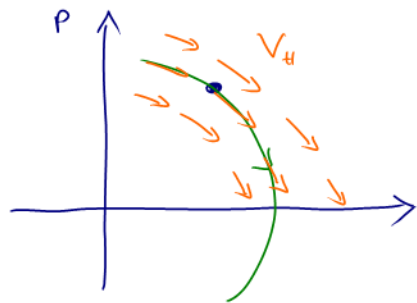
$$\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

Für jede Größe A gibt es ein ideales Messgerät derart, dass nach Messung von a_i System im Zustand $|\varphi_i\rangle$.

(P3) Dynamik :

Wie entwickelt sich ein q -m. Zustand
in der Zeit: $|\psi(t)\rangle = ?$

Erinnerung: klassische Mechanik in Hamiltonscher Formulierung:

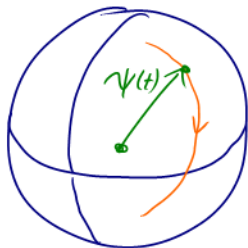


Zustand $x = (q, p)$ genügt Dynamik

$$\dot{x}(t) = V_H(x(t))$$

$$\text{mit } V_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

QM:



"Bahn" $\psi(t) \in \{ \psi \mid \|\psi\| = 1 \} \subset \mathcal{H}$

(für alle Zeiten ist $\|\psi(t)\| = 1$)

$$\dot{\psi}(t) = f(\psi(t)) \quad : \quad f(\psi) = ?$$

QM postuliert: f ist lineare Abbildung, d.h.

$$\dot{\psi}(t) \stackrel{!}{=} F \psi(t) \quad (*)$$

mit Operator F derart, dass für alle Zeiten $\|\psi(t)\|=1$.

Welche Anforderung stellt Normierung an F ?

Rechnung: $(\psi \equiv \psi(t))$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \|\psi\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \psi, \psi \rangle \stackrel{\text{Leibniz}}{=} \langle \dot{\psi}, \psi \rangle + \langle \psi, \dot{\psi} \rangle \stackrel{(*)}{=} \langle \underbrace{F\psi}_{\text{"+"}}, \psi \rangle + \langle \psi, F\psi \rangle \\ &= \langle \psi, F^+ \psi \rangle + \langle \psi, F\psi \rangle = \langle \psi, \underbrace{(F^+ + F)} \psi \rangle \end{aligned}$$

dies gilt für beliebige $\psi \rightarrow F^+ + F = 0$, d.h. $F^+ = -F$ (1)
(„ F anti-hermitesch“)

zweckmäßig: $F := iH \rightarrow$ (1) gleichbedeutend zu $H^+ = H$,
d.h. H hermitesch !

die quantenmechanische Dynamik postulieren wir somit als

(P3) $(*)'$ $\boxed{\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -iH |\psi(t)\rangle}$, wobei H ein hermitescher Op.

$\uparrow$
Schrödinger-Gleichung

Bemerkungen:

- $(*)'$ besagt: H ist Generator der Zustandsentwicklung
- als hermitescher Op. entspricht H einer physikalischen Größe;
welcher? Energie !
- nicht-lineare Zeitentwicklung verstößt gegen
spezielle Relativitätstheorie! (e.g. Simon, Bužek, Gisin, 2001)