

Quantenmechanische Dynamik und Erhaltungsgrößen

↪ (P3) $\boxed{\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -i H |\psi(t)\rangle}$, H hermitescher Op.
"Schrödinger-Gleichung"

Wie lauten die Erhaltungsgrößen dieser Dynamik ?
?

Def.: die Größe A ($\hat{=}$ hermitescher Operator A !)
ist eine Erhaltungsgröße g.d.w. für alle
Lösungen $|\psi(t)\rangle$ der Schrödinger-Gl.

$$\boxed{\langle A \rangle_{|\psi(t)\rangle} \text{ zeitlich konstant}}$$

Wir zeigen:

$$A \text{ Erhaltungsgröße} \iff HA \stackrel{!}{=} AH$$

dazu bestimmen wir $\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{|\psi(t)\rangle}$:

mit $\psi \equiv \psi(t) \equiv |\psi(t)\rangle$ und $\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, A \psi \rangle$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle A \rangle_\psi &= \frac{d}{dt} \langle \psi, A \psi \rangle = \langle \dot{\psi}, A \psi \rangle + \langle \psi, A \dot{\psi} \rangle \\ &\stackrel{(P3)}{=} \langle \underbrace{-iH\psi}_\psi, A \psi \rangle + \langle \psi, A(-iH)\psi \rangle \\ &= \langle \psi, iHA\psi \rangle - \langle \psi, iAH\psi \rangle = \langle \psi, i(HA - AH)\psi \rangle \\ &\quad \underbrace{(-iH)^\dagger = iH^\dagger} \end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_\psi = \langle \psi, i(HA - AH)\psi \rangle \quad (*)$$

hieraus folgt:

1) ist A Erhaltungsgröße, dann $0 \stackrel{(*)}{=} \frac{d}{dt} \langle A \rangle_\psi = \langle \psi, i(HA - AH)\psi \rangle$
für alle $\psi \in \mathcal{X} \quad \rightarrow \quad HA - AH = 0$; d.h. HA = AH

2) ist HA = AH dann $\frac{d}{dt} \langle A \rangle_\psi \stackrel{(*)}{=} \langle \psi, i(\underbrace{HA - AH}_{=0})\psi \rangle = 0$;
d.h. A ist Erhaltungsgröße.

somit gezeigt:

A Erhaltungsgröße $\Leftrightarrow$ HA = AH



mit Kommutator von A, B :

$$[A, B] := AB - BA$$

gilt also auch:

$$A \text{ Erhaltungsgröße} \iff [H, A] = 0$$

da trivialerweise $[H, H] = 0$, ist H als „Generator“ der Zeitentwicklung (1) immer Erhaltungsgröße!

→ $H \equiv \text{Energie}$, bis auf Faktor λ der

Dimension $\text{Energie} \times \text{Zeit} \equiv \text{Wirkung}$!

d.h. $\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle$

numerische Übereinstimmung mit „Energie“ der klassischen Mechanik erfordert $\hbar \stackrel{!}{=} h = 1,04 \dots \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

Plancksches Wirkungsquantum

→ (P3) Dynamik: die Zeitentwicklung eines Zustands $|\psi(t)\rangle$ genügt der Schrödinger-Gleichung

$$i \hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

hierbei ist H der Energie- oder Hamilton-Operator des Systems.