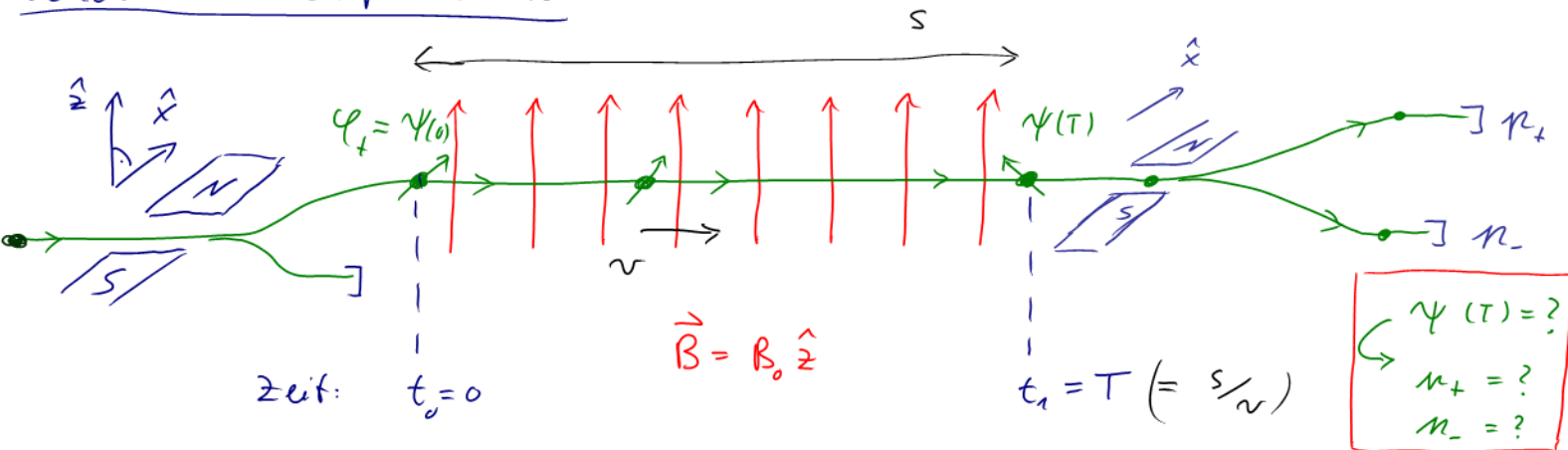


Quantenmechanische Dynamik, Zeitentwicklungsoperator, Energieeigenzustände

Wir betrachten ein zweistufiges Stern-Gerlach-Experiment, bei dem die Ag-Atome nach Passage des 1. S.G. Magneten über eine gewisse Strecke ($\hat{=}$ Zeitdauer) einem homogenen Magnetfeld ausgesetzt sind. Wie ändern sich Zustände und Messwahrscheinlichkeiten?

Schema des Experiments:



Wie lautet der Hamilton-Operator H der Dynamik für $0 < t < T$?

Energie eines klassischen mag. Moments $\vec{\mu} = \underset{(-)}{+} \mu_0 \hat{z}$ im Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \hat{z}$:

! $\underset{(+)}{-} \mu_0 B_0$ $(E_{\vec{\mu}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B})$

= Eigenwert von H zum Eigenzustand $\psi_{\pm}$ ($\hat{z}_{\pm}$)

→ d.h. genau: $H = \mu_0 B_0 (|\psi_{-}\rangle\langle\psi_{-}| - |\psi_{+}\rangle\langle\psi_{+}|)$

zu lösendes Problem:

$t_0 = 0 :$

$\psi(0) = \varphi_{+}$

$i\hbar \dot{\psi}(t) = H \psi(t)$

$t_1 = T :$

$\psi(T) = ?$

d.h. finde spezielle Lösung $\psi(t)$ der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \dot{\psi}(t) = H \psi(t) \quad (1)$$

zum Anfangswert $\psi(0) = \varphi_+$.

wir entwickeln dazu im Folgenden ein allgemeines Verfahren:

Schrödinger-Gl. (1) ist offenbar homogene, lineare DGL

1. Ordnung der Form

$$\dot{\gamma}(t) = a \gamma(t)$$

wobei hier $\gamma(t) = \psi(t)$ (Vektor!)

$$a = -\frac{i}{\hbar} H \quad (\text{Operator!})$$

Spezielle Lösg. zum AW $\gamma(0) = \gamma_0$:

$$\gamma(t) = e^{at} \gamma_0$$

wobei $e^{\underline{a}t} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} t^l \underline{a}^l$: Operator!

denn: (i) $\underline{\dot{\gamma}(t)} = \frac{d}{dt} (e^{at}) \gamma_0 = a \underbrace{e^{at} \gamma_0}_{\gamma(t)} = \underline{a \gamma(t)}$

(ii) $\underline{\gamma(0)} = \underbrace{e^{a \cdot 0}}_1 \gamma_0 = \underline{\gamma_0}$

┌ Bemerkung: dass hier $\gamma(t)$ ein Vektor und a ein Operator ist, ändert nichts an der Richtigkeit der Rechnungen, da Operatoren genau wie komplexe Zahlen addiert, multipliziert, potenziert, abgebildet werden können und somit $\gamma(t) = e^{at} \gamma_0$ nach den bekannten Regeln differenziert werden kann. ┘

mit $\gamma(t) = \psi(t)$, $\gamma_0 = \psi_0$ und $a = -\frac{i}{\hbar} H$ erhalten wir:

$$\boxed{\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \psi_0} \quad (2)$$

mittels Zeitentwicklungsoperator $U(t)$ definiert durch

$$U(t) := e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \equiv \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right)$$

lautet die spezielle Lösung (2) der Schrödinger-Gleichung (1) zum Anfangswert $\psi(0) = \psi_0$:

$$\psi(t) = U(t) \psi_0$$

bzw.

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi_0\rangle$$

(Dirac-Notation)

Wie kommt man nun von diesen eher formalen Lösungen zu konkreten Ergebnissen ?



stelle Zustände und Zeitentwicklungsoperator in Eigenbasis des Hamilton-Operators H bzw. den entsprechenden Projektoren dar! ("Energie-Darstellung")

Orthonormale Eigenvektoren von H ("Energieeigenzustände"):

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$$

mit Eigenwerten ("Eigenenergien")

$$E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_n$$

genügen der nun "zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung"
genannten Eigenwertgleichung:

$$H|\varphi_j\rangle = E_j |\varphi_j\rangle$$

→ Spektraldarstellung des Hamilton-Operators:

$$H = \sum_{j=0}^n \underline{E_j} | \varphi_j \rangle \langle \varphi_j |$$

→ Spektraldarstellung des Zeitentwicklungsops. $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$:

$$U(t) = \sum_{j=0}^n e^{-\frac{i}{\hbar} \underline{E_j} t} | \varphi_j \rangle \langle \varphi_j |$$

(vgl. 2. Übung,
Aufgabe 8g)

-
- direkt anwendbar in konkreten Problemen!
 - erlaubt allgemeine Einsichten!

beachte: $\underline{u_j(t)} := e^{-\frac{i}{\hbar} E_j t} \equiv \underline{e^{-i \omega_j t}}$
mit Winkelfrequenz $\omega_j = \frac{E_j}{\hbar}$

