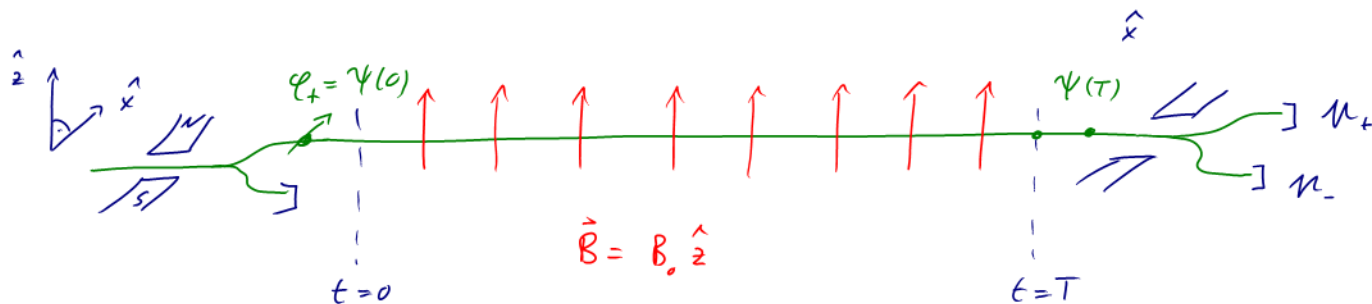


Anwendung im oben geschilderten Problem:

Magnetisches Moment ("Spin") eines Ag-Atoms im homogenen Magnetfeld:



Hamiltonoperator: $H = \mu_0 B_0 (|\psi_-\rangle\langle\psi_-| - |\psi_+\rangle\langle\psi_+|)$ (s.o.)

→ Eigenenergie $\bar{E}_0 = -\mu_0 B_0$ im Energieeigenzustand $|\psi_+\rangle$
 $\bar{E}_1 = +\mu_0 B_0$ $|\psi_-\rangle$

→ Zeitentwicklungsoperator:

Zeitentwicklungsoperator (in Spektraldarstellung):

$$\begin{aligned} U(t) &= e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t} |\psi_+\rangle \langle \psi_+| + e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} |\psi_-\rangle \langle \psi_-| \\ &= e^{+i \frac{\mu_0 B_0}{\hbar} t} |\psi_+\rangle \langle \psi_+| + e^{-i \frac{\mu_0 B_0}{\hbar} t} |\psi_-\rangle \langle \psi_-| \end{aligned}$$

mit Winkelfrequenz $\omega := \frac{\mu_0 B_0}{\hbar}$ also

$$U(t) = e^{i \omega t} |\psi_+\rangle \langle \psi_+| + e^{-i \omega t} |\psi_-\rangle \langle \psi_-|$$

→ Anfangszustand $|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle)$ bei $t=0$ entwickelt sich zu Zustand

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i \omega t} |\psi_+\rangle + e^{-i \omega t} |\psi_-\rangle)$$

zur Zeit $t > 0$.

→ Messung mit S.-G.-Magn. in $\hat{x}$ -Richtung zu Zeit t
ergibt $\mu_x = +\mu_0$ ($\hat{=}$ Zustand φ_+) mit Wkt.

$$(1) \quad \underline{p_+(t)} = |\langle \varphi_+ | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} |e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}|^2 = \cos^2(\omega t)$$

$$\quad \quad \quad \uparrow$$

$$\langle \varphi_+ | = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \chi_+ | + \langle \chi_- |)$$

$$\quad \quad \quad \equiv \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t)}},$$

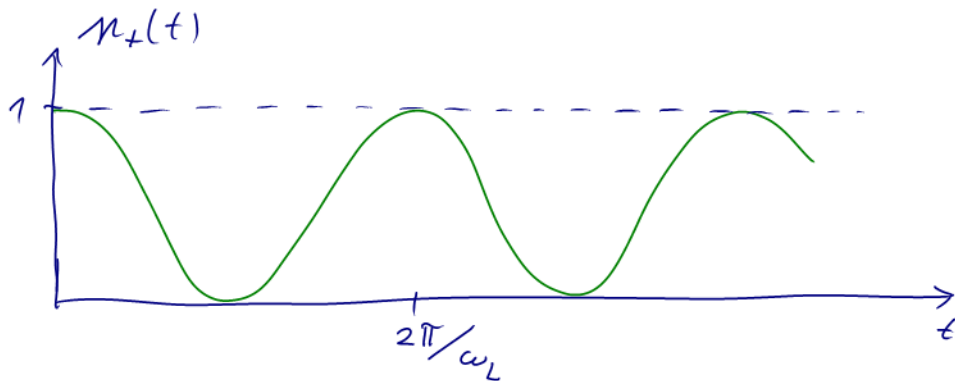
und $\mu_x = -\mu_0$ ($\hat{=}$ Zustand φ_-) mit Wkt.

$$(2) \quad \underline{p_-(t)} = |\langle \varphi_- | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} |e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}|^2 = \sin^2(\omega t)$$

$$\quad \quad \quad \uparrow$$

$$\langle \varphi_- | = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \chi_+ | - \langle \chi_- |)$$

$$\quad \quad \quad = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t)}} \quad (= 1 - p_+)$$



$p_+(t)$ oszilliert mit
sog. Larmorfrequenz

$$\omega_L = 2\omega = 2 \frac{\mu_0 B_0}{\hbar}.$$

Erwartungswert der Größe $\hat{\mu}_x = \mu_0 |\varphi_+\rangle\langle\varphi_+| - \mu_0 |\varphi_-\rangle\langle\varphi_-|$
bei Messung zur Zeit t :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle \mu_x \rangle_{|\psi(t)\rangle} &= \eta_+(t) \cdot (+\mu_0) + \eta_-(t) \cdot (-\mu_0) \\ &\stackrel{(1),(2)}{=} \mu_0 \cos(2\omega t) = \underline{\underline{\mu_0 \cos(\omega_L t)}} \end{aligned}$$

analog:

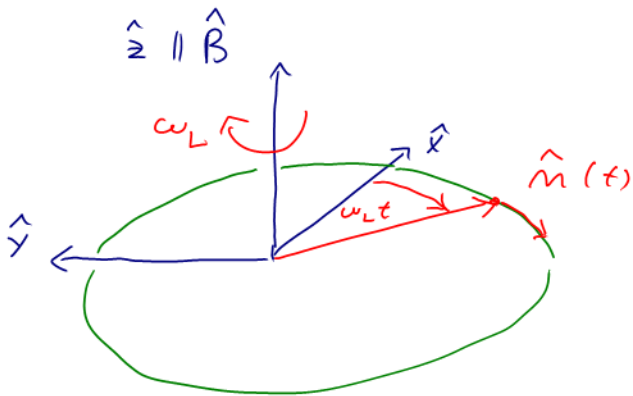
$$\bullet \quad \langle \mu_z \rangle_{|\psi(t)\rangle} = +\mu_0 \underbrace{|\langle \chi_+ | \psi(t) \rangle|^2}_{= \frac{1}{2}} - \mu_0 \underbrace{|\langle \chi_- | \psi(t) \rangle|^2}_{= \frac{1}{2}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle \mu_y \rangle_{|\psi(t)\rangle} &= +\mu_0 |\langle \chi_+ | \psi(t) \rangle|^2 - \mu_0 |\langle \chi_- | \psi(t) \rangle|^2 \\ &\stackrel{\uparrow}{=} \frac{\mu_0}{4} |e^{i\omega t} - i e^{-i\omega t}|^2 - \frac{\mu_0}{4} |e^{i\omega t} + i e^{-i\omega t}|^2 \\ | \chi_{\pm} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (| \chi_+ \rangle \pm i | \chi_- \rangle) \\ &= \frac{\mu_0}{4} (2 + 2 \operatorname{Re} i e^{i2\omega t}) - \frac{\mu_0}{4} (2 - 2 \operatorname{Re} i e^{i2\omega t}) \\ &= \mu_0 \operatorname{Re} i e^{i2\omega t} = \underline{\underline{-\mu_0 \sin(\omega_L t)}} \end{aligned}$$

zusammengefasst:

$$\langle \vec{\mu} \rangle_{\psi(t)} \equiv \begin{pmatrix} \langle \mu_x \rangle_{\psi(t)} \\ \langle \mu_y \rangle_{\psi(t)} \\ \langle \mu_z \rangle_{\psi(t)} \end{pmatrix} = \mu_0 \hat{n}(t) \quad \text{mit} \quad \hat{n}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_L t) \\ -\sin(\omega_L t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{=}$ Larmorpräzession des Spins mit Larmorfrequenz
 $\omega_L = 2\mu_0 B_0 / \hbar$ um $-\hat{z}$ Achse:



klassisches mag. Moment $\vec{\mu}$
 mit $|\vec{\mu}| = \mu_0$ und Drehim-
 puls $|\vec{L}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar$ genügt

$$\vec{\mu}(t) = \mu_0 \hat{n}(t)$$

Unterschied?

$\langle \mu_z \rangle_{\psi(t)} = 0$ folgt auch aus der Tatsache, dass

wegen $[\mu_z, H] = 0$ μ_z Erhaltungsgröße und

damit $\langle \mu_z \rangle_{\psi(\underline{t})} = \langle \mu_z \rangle_{\psi(\underline{0})} = \langle \mu_z \rangle_{\psi_+} = 0$.