Zwei allgemeine Eigenschaften der quantenmechanischen Dynamik:

(i) Energieeigenzustände sind stationär !

(ii) Superposition zweier Energieeigenzustände unterschiedlicher Energien führt zu Schwebungseffekten der Frequenz

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta E}{\hbar}}$$

(„Quantenschwebung")

Ausgangspunkt:

H sei der Hamiltonoperator eines q.-m. Systems,

$U(t)$ der Zeitentwicklungsoperator;

$\rightarrow$ $\psi(t) = U(t)\psi_0$ ist Lösung der Schrödinger-Gleichung

$i\hbar\dot{\psi}(t) = H\psi(t)$ zum Anfangswert $|\psi_0\rangle$.

Spektraldarstellungen von H und $U(t)$:

Eigenenergien

$$H = \sum_{j=0}^{n} E_j\, |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$$

Energieeigenzustände

$$U(t) = \sum_{j=0}^{n} \boxed{e^{-i\frac{E_j}{\hbar}t}}\, |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$$

$\rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}U(t) \text{ besitzt zeit\underline{un}abhängige Eigenzustände } |\varphi_j\rangle \text{ zu} \\ \text{zeit\underline{ab}hängigen Eigenwerten } \lambda_j(t) = e^{-i\frac{E_j}{\hbar}t} \quad (|\lambda_j(t)| = 1\ !)\end{array}}$

Ein Energieeigenzustand φ_j ist stationär i.d.S., dass der Erwartungswert jeder beliebigen Größe G bzgl. des zeitentwickelten Zustands $U(t)\varphi_j$ zeitunabhängig ist:

$$\langle G \rangle_{U(t)\varphi_j} = \text{konst} \; !$$

mit φ_j Eigenvektor von $U(t)$ zum EW $\lambda_j(t) = e^{-i\frac{E_j t}{\hbar}}$, $|\lambda_j(t)| = 1$ ist $U(t)\varphi_j = \lambda_j(t)\varphi_j$ und somit

$$\langle G \rangle_{U(t)\varphi_j} = \langle G \rangle_{\lambda_j(t)\varphi_j} = \langle \lambda_j(t)\varphi_j , G\lambda_j(t)\varphi_j \rangle$$

$$= \langle \varphi_j , G \underbrace{\lambda_j^*(t)\lambda_j(t)}_{=1\,!} \varphi_j \rangle = \underbrace{\langle \varphi_j , G\varphi_j \rangle}_{\text{zeit}\underline{\text{un}}\text{abhängig}\,!}$$

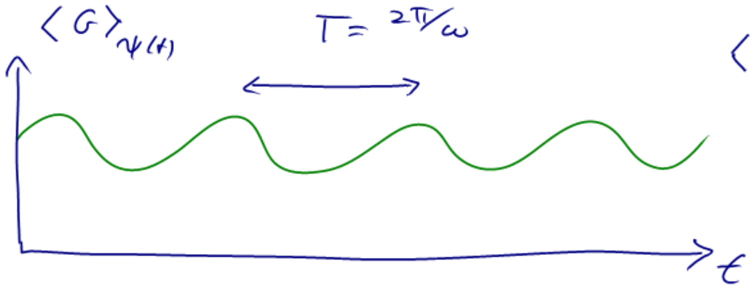
wir zeigen nun:

Ist ψ_0 die Superposition zweier Energieeigenzustände φ_ℓ und φ_m, so oszilliert der Erwartungswert einer bel. Größe G bzgl. des zeitentwickelten Zustands $\psi(t) = U(t)\psi_0$ mit der Frequenz

$$\omega = \frac{1}{\hbar}(E_\ell - E_m)$$

("Quantenschwebung")

schematisch:



$$\langle G \rangle_{\psi(t)} = a + b\cos(\omega t + \vartheta)$$

(Beispiel: mag. Moment im homog. Magnetfeld! (s.u.))

sei $\psi_0 = \alpha\,\varphi_e + \beta\,\varphi_m$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$; $\alpha, \beta \neq 0$

dann $\psi(t) = U(t)\psi_0 = \alpha\, U(t)\varphi_e + \beta\, U(t)\varphi_m$

$$= \alpha\, e^{-i\omega_e t}\varphi_e + \beta\, e^{-i\omega_m t}\varphi_m \qquad (*)$$

wobei $\omega_e = \frac{E_e}{\hbar}$, $\omega_m = \frac{E_m}{\hbar}$.

$$\rightarrow \langle G\rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t), G\,\psi(t)\rangle$$

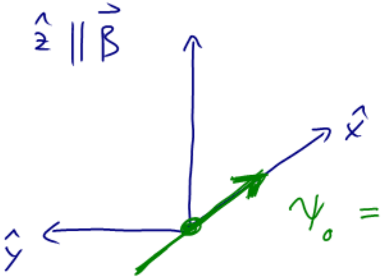
$$\overset{(*)}{=} \underbrace{|\alpha|^2 \langle G\rangle_{\varphi_e} + |\beta|^2 \langle G\rangle_{\varphi_m}}_{=: a} + \underbrace{\alpha^*\beta\, e^{i(\omega_e-\omega_m)t}\langle\varphi_e, G\varphi_m\rangle + \beta^*\alpha\, e^{i(\omega_m-\omega_e)t}\langle\varphi_m, G\varphi_e\rangle}_{= \mathrm{Re}\, \underbrace{2\alpha^*\beta\langle\varphi_e, G\varphi_m\rangle}_{=: b\, e^{i\vartheta}} e^{i(\omega_e-\omega_m)t}}$$

$\rightarrow$

$$\longrightarrow \quad \langle G \rangle_{\psi(t)} = a + b \cos\big(\underbrace{(\omega_e - \omega_m)}_{= \omega} t + \vartheta \big)$$

Beispiele:

1) Larmorpräzession des Spins im homog. Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \hat{z}$:



$$H = \mu_0 B_0 \left(|\psi_-\rangle\langle\psi_-| - |\psi_+\rangle\langle\psi_+| \right)$$

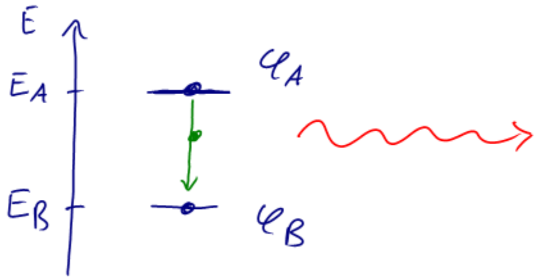
$$\psi_0 = \varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle \right)$$

d.h. ψ_0 ist Superpos. der Energieeigenzust. $|\psi_+\rangle$ und $|\psi_-\rangle$ der Eigenenergien $E_+ = -\mu_0 B_0$ und $E_- = +\mu_0 B_0$

$\longrightarrow$ Oszillation von etwa $\langle \mu_x \rangle_{\psi(t)}$ mit Frequenz

$$\omega = \frac{1}{\hbar} \left(E_- - E_+ \right) = \frac{2 \mu_0 B_0}{\hbar} \stackrel{!}{=} \omega_L$$

2) Warum emittiert ein Atom beim Übergang von Zustand A mit Energie E_A nach Zustand B mit Energie E_B Licht der <u>Frequenz</u> $\omega = \frac{E_A - E_B}{\hbar}$?



<u>semi-quantitatives Argument</u>: Emission von Licht ≡ el.-mag. Welle benötigt <u>oszillierendes</u> <u>elekt. Dipolmoment $\vec{d}$</u> !

- <u>während</u> Übergang von A nach B Atom vorübergehend in <u>Superposition</u> von φ_A und φ_B ! $\rightarrow$ $\langle \vec{d} \rangle$ oszilliert mit Frequenz $\omega = \frac{1}{\hbar}(E_A - E_B)$ $\longrightarrow$ Emission el.-mag. Wellen <u>genau</u> dieser Frequenz !