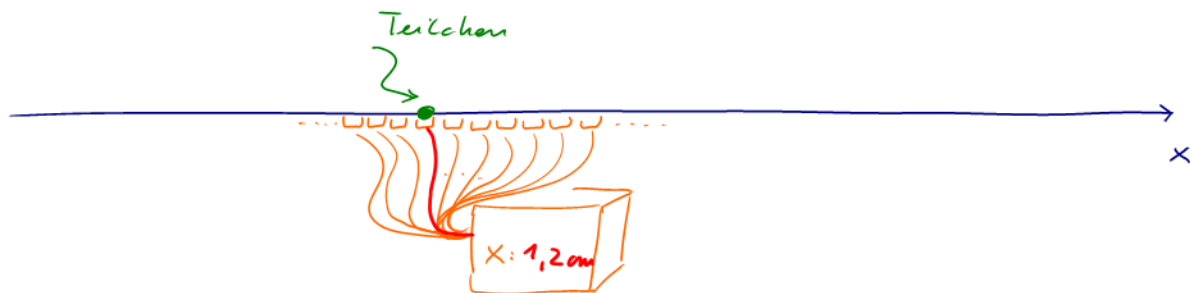


Quantenmechanik eines Partikels (in einer Dimension, später mehr)



idealisierte Vorstellung:

Ortskoordinate X des Teilchens ist
physikalische Größe mit

kontinuierlichen Messwerten

$$x \in \mathbb{R}$$

$\hat{=}$

herm. Operator X mit
kontinuierlichen Eigenwerten

$$x \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ orthonormale Eigenzustände

$$B = \{ | \varphi_x \rangle \}_{x \in \mathbb{R}}$$

Kontinuum an Eigenwerten x und Eigenzuständen $|\varphi_x\rangle$
 erfordert geeignete Notation (tatsächlich: geeignete Mathematik),
 die wir uns in Analogie zur bisherigen erschließen:

alt: diskrete Basis

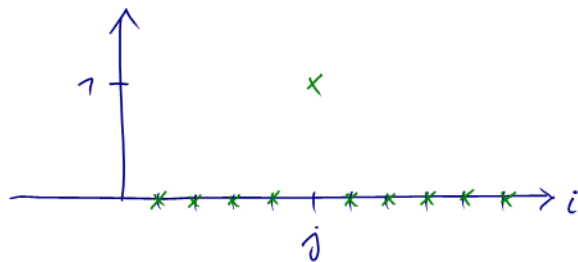
$$|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$$

neu: kontinuierliche Basis

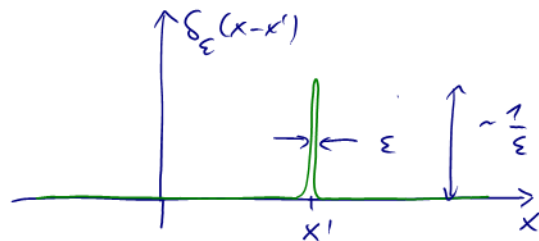
$$\{|\varphi_x\rangle\}_{x \in \mathbb{R}}$$

Orthonormalität

$$\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$$



$$\langle \varphi_x | \varphi_{x'} \rangle = \delta(x - x')$$



„Deltafunktion“: (i) $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$

(Dirac)

$$(ii) \int_{-a}^a \delta(x) dx \stackrel{!}{=} 1 \quad (a > 0)$$

Vollständigkeit

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \mathbb{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\varphi_x\rangle\langle\varphi_x| = \mathbb{1}$$

→

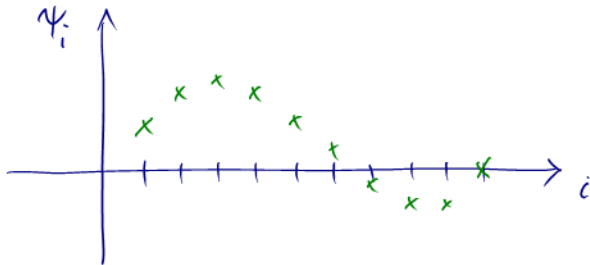
Basisdarstellung:

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\psi\rangle$$

Komponente von $|\psi\rangle$ bzgl. $|\varphi_i\rangle$:

$$\psi_i := \langle\varphi_i|\psi\rangle$$

$$\text{d.h. } |\psi\rangle = \sum_i \psi_i |\varphi_i\rangle$$

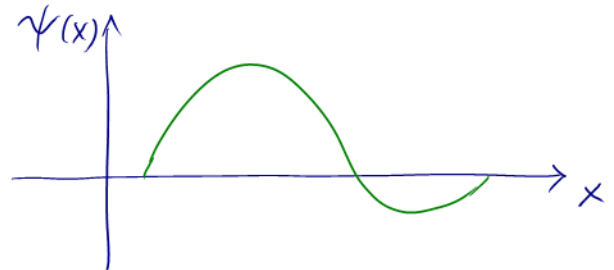


$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int dx |\varphi_x\rangle\langle\varphi_x|\psi\rangle$$

Wellenfunktion von $|\psi\rangle$ bei x :

$$\psi(x) := \langle\varphi_x|\psi\rangle$$

$$\text{d.h. } |\psi\rangle = \int dx \psi(x) |\varphi_x\rangle$$



Skalarprodukt

$$\underline{\langle \psi | \chi \rangle} = \langle \psi | \mathbb{1} | \chi \rangle$$

$$= \sum_i \langle \psi | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \chi \rangle$$

$$= \sum_i \underline{\psi_i^* \chi_i}$$

$$\underline{\langle \psi | \chi \rangle} = \langle \psi | \mathbb{1} | \chi \rangle$$

$$= \int dx \langle \psi | \varphi_x \rangle \langle \varphi_x | \chi \rangle$$

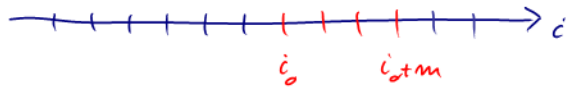
$$= \underline{\int dx \psi^*(x) \chi(x)}$$

Norm

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = \sum_i |\psi_i|^2$$

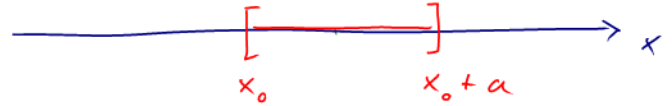
$$\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = \int dx |\psi(x)|^2$$

Bornsche Regel



Wkt, dass System im
Zust. $|\varphi_{i_0}\rangle$ oder $|\varphi_{i_0+m}\rangle$ oder
... $|\varphi_{i_0+m}\rangle$:

$$P = \sum_{i=i_0}^{i_0+m} |\langle \varphi_i | \psi \rangle|^2 = \sum_{i=i_0}^{i_0+m} |\psi_i|^2$$



Wkt, dass Teilchen an Ort
 $x \in [x_0, x_0+a]$:

$$P = \int_{x_0}^{x_0+a} dx |\langle \varphi_x | \psi \rangle|^2 = \int_{x_0}^{x_0+a} dx |\psi(x)|^2$$

$\rightarrow |\psi(x)|^2 = \underline{\text{Aufenthaltswahr-}} \\ \underline{\text{scheinlichkeitsdichte}}$

(Born)

Beispiele :

1) $|\psi\rangle = |\varphi_{x_0}\rangle$ besitzt Wellenfunktion $\psi(x) \equiv \langle \varphi_x | \varphi_{x_0} \rangle = \delta(x - x_0)$

2) $\chi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\sigma^2} e^{ikx}$ ist Wellenfkt. des normierten

Zustandes $|\chi\rangle$: $\|\chi\|^2 = \int |\chi(x)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int dx e^{-x^2/2\sigma^2} = 1$

3) $\langle \chi | \psi \rangle \stackrel{1) 2)}{=} \int dx \chi(x)^* \delta(x - x_0) = \chi^*(x_0)$