

Quantenmechanischer Impuls

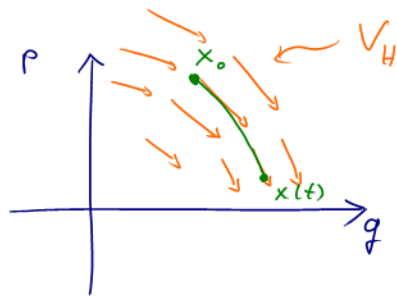
Impuls P des Teilchens ist physikalische Größe:

Wie lautet der entsprechende hermitesche Operator?

Hamiltonsche Mechanik:

a) Hamilton-Fkt $H(q, p)$ ist Erzeuger der Zeitentwicklung:

($\equiv$ "Translation in der Zeit")



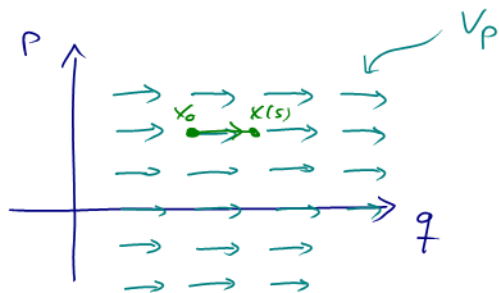
Hamilt. VF

$$\underline{V_H} = \left(\underline{\frac{\partial H}{\partial p}}, -\underline{\frac{\partial H}{\partial q}} \right)$$

$$\rightarrow \text{Dynamik: } \frac{dX(t)}{dt} \stackrel{!}{=} V_H(X(t))$$

$$\Rightarrow x_0 \xrightarrow{t} X(t)$$

b) Impuls p ist Erzeuger der Translation :



$$\underline{V_p} = \left(\underline{\frac{\partial p}{\partial p}}, -\underline{\frac{\partial p}{\partial q}} \right) = (1, 0)$$

$$\rightarrow \text{"Dynamik"} : \quad \frac{dX(s)}{ds} \stackrel{!}{=} V_p(X(s)) = (1, 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dq}{ds} = 1, \quad \frac{dp}{ds} = 0$$

$$\leadsto x_0 = (q_0, p_0) \xrightarrow{s} \underline{(q_0 + s, p_0)}$$

in der Quantenmechanik:

a) Hamilton-Operator H ist Erzeuger des Zeitentwicklungsoperators:

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$$

d.h. genau:

$$H \stackrel{!}{=} i\hbar \left. \frac{d}{dt} U(t) \right|_{t=0}$$



b) Impuls-Operator P ist Erzeuger des

Translationsoperators $T(a)$, def. durch

$$T(a)|\varphi_x\rangle \stackrel{!}{=} |\varphi_{x+a}\rangle,$$

d.h. genau

$$P := i\hbar \left. \frac{dT(a)}{da} \right|_{a=0}$$

→ Wirkung auf Wellenfunktion:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Zustand:} & |\psi\rangle & \xrightarrow{P} & P|\psi\rangle & : \\
 \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
 \text{Wellenfkt:} & \psi(x) & \xrightarrow{-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}} & \boxed{-i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}} & : \boxed{P} \\
 & & & & \updownarrow \\
 & & & & \boxed{-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}
 \end{array}$$

└ denn:

$$\underline{|\psi\rangle} = \int dx \, \underline{\psi(x)} \, |\varphi_x\rangle$$

$$\rightarrow \underline{P|\psi\rangle} = i\hbar \frac{d}{da} T(a)|\psi\rangle \Big|_{a=0} = i\hbar \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi(x) T(a) |\varphi_x\rangle$$

$$= i\hbar \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi(x) |\varphi_{x+a}\rangle = i\hbar \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi(x-a) |\varphi_x\rangle \Big|_{a=0}$$

$$= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \underbrace{\frac{d}{da} \psi(x-a)}_{= -\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}} \Big|_{a=0} |\varphi_x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \boxed{\left(-i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)} |\varphi_x\rangle$$