Eigenschaften des Impuls-Operators

1) Wirkung auf Wellenfunktion:

$$\psi(x) \xrightarrow{p} -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}(x)$$

d.h.
$$\boxed{p \mathrel{\hat{=}} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}$$

Impuls im Ortsdarstellung

2) p hermitesch: $p = p^{+}$

3) $[x, p] = i\hbar \mathbb{1}$

4) $T(s) = e^{-ips/\hbar}$ (vgl.: $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$)

1) $\boxed{p \mathrel{\hat{=}} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}$: siehe vorherige Vorlesung

2) $\boxed{p = p^\dagger}$: wegen $\langle \psi, \varphi \rangle = \langle T(a)\psi, T(a)\varphi \rangle = \langle \psi, T^\dagger(a)\, T(a)\varphi \rangle$

(für alle ψ, φ) ist $T^\dagger(a)\, T(a) = \mathbb{1}$ und somit:

$$0 = \frac{d}{da}\left(T^\dagger(a)\, T(a)\right) = \left(\frac{dT^\dagger(a)}{da}\right) T(a) + T^\dagger(a) \frac{dT(a)}{da} \qquad \Big|\ \cdot i\hbar,\ a \to 0$$

$$\rightarrow \quad 0 = \underbrace{-\left(i\hbar \frac{dT(a)}{da}\right)^\dagger_{a=0}}_{-p^\dagger} \underbrace{T(0)}_{=\mathbb{1}} + \underbrace{T^\dagger(0)}_{=\mathbb{1}} \underbrace{\left(i\hbar \frac{dT(a)}{da}\right)_{a=0}}_{=p}$$

also $p = p^\dagger$.

3) $\boxed{[x, p] = i\hbar \mathbb{1}}$:

wir zeigen zuerst: $[x, T(a)] = aT(a)$:

$$[x, T(a)] \, |\varphi_{x_0}\rangle = (\hat{x}\, T(a) - T(a)\, \hat{x}) \, |\varphi_{x_0}\rangle =$$

$$= \hat{x} \, |\varphi_{x_0+a}\rangle - T(a)\, x_0 \, |\varphi_{x_0}\rangle = (x_0 + a - x_0) \, |\varphi_{x_0+a}\rangle$$

$$= a\, T(a) \, |\varphi_{x_0}\rangle$$, gilt für <u>alle</u> x_0. $\rightarrow [x, T(a)] = aT(a)$.

$$\rightarrow \quad [x, p] = i\hbar \frac{d}{da} [x, T(a)] \Big|_{a=0} = i\hbar \frac{d}{da} \left(a T(a) \right)_{a=0} = i\hbar\, T(0)$$

$$= i\hbar \mathbb{1}.$$

4) $\boxed{T(s) = e^{-i\frac{p s}{\hbar}}}$:

$$T(a+s_0) = T(a)\,T(s_0)$$

$$\left.\frac{d\,T(s)}{ds}\right|_{s_0} = \left.\frac{d}{da}T(a+s_0)\right|_{a=0} = \underbrace{\left(\frac{d}{da}T(a)\right)_{a=0}}_{= -i\frac{p}{\hbar}} T(s_0)$$

d. h. $T(s)$ genügt DGL $\frac{dT(s)}{ds} = -i\frac{p}{\hbar}\,T(s)$ mit

Anfangswert $T(0) = \mathbb{1}$

$$\rightarrow \quad T(s) = e^{-i\frac{ps}{\hbar}}\,\mathbb{1}$$

Eigenzustände und Eigenwerte des Impuls-Operators

Zustand $|\tilde{\varphi}_p\rangle$ mit Wellenfunktion $\boxed{\tilde{\varphi}_p(x) = e^{ipx/\hbar}}$ ist

Impulseigenzustand zum Impulseigenwert $p \in \mathbb{R}$, d. h.

$$\hat{P}\,|\tilde{\varphi}_p\rangle = p\,|\tilde{\varphi}_p\rangle$$

[denn $\quad -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_p(x) = p\, e^{ipx/\hbar} = p\, \tilde{\varphi}_p(x)$]

Orthonormalität: $\quad \boxed{\langle \tilde{\varphi}_p | \tilde{\varphi}_{p'} \rangle = 2\pi\hbar\, \delta(p-p')}$

Vollständigkeit: $\quad \boxed{\mathbb{1} = \int \frac{dp}{2\pi\hbar}\, |\tilde{\varphi}_p\rangle\langle\tilde{\varphi}_p|}$

→ Darstellung eines Zustandes in Impulseigenbasis („Impulsraumdarstellung"):

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}\,|\psi\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar}\, |\tilde{\varphi}_p\rangle\langle\tilde{\varphi}_p|\psi\rangle$$

d.h. mit „Impulswellenfunktion" $\tilde{\psi}(p) := \langle\tilde{\varphi}_p|\psi\rangle$ ist

$$|\psi\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar}\, \tilde{\psi}(p)\, |\tilde{\varphi}_p\rangle$$

beachte:

$$\boxed{\tilde{\psi}(p) = \langle\tilde{\varphi}_p|\psi\rangle = \int dx\, \varphi_p^*(x)\, \psi(x) = \int dx\, \psi(x)\, e^{-ipx/\hbar}}$$

d.h.

$$\tilde{\psi}(p) \xleftrightarrow[\text{transformation}]{\text{Fourier-}} \psi(x)$$

$\rightarrow$ „Welle-Teilchen-Dualismus":

$$\boxed{\int dx\ \psi(x)\,|\varphi_x\rangle \overset{!}{=} |\psi\rangle \overset{!}{=} \int \frac{dp}{2\pi\hbar}\ \tilde{\psi}(p)\ |\tilde{\varphi}_p\rangle}$$

$|\psi\rangle$ als Superposition von Ortszuständen ("Teilchenbild") $\Longleftrightarrow$ $|\psi\rangle$ als Superposition von Impulszuständen ("Wellenbild")

(Beispiele in den Übungen)