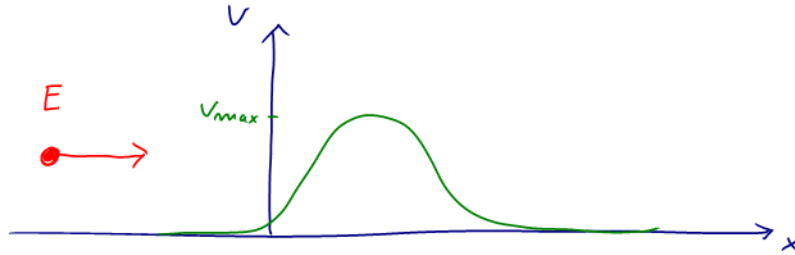


# Reflexion und Transmission an Potentialschwellen, Tunneleffekt



Teilchen mit Energie  $E < V_{\max}$ :

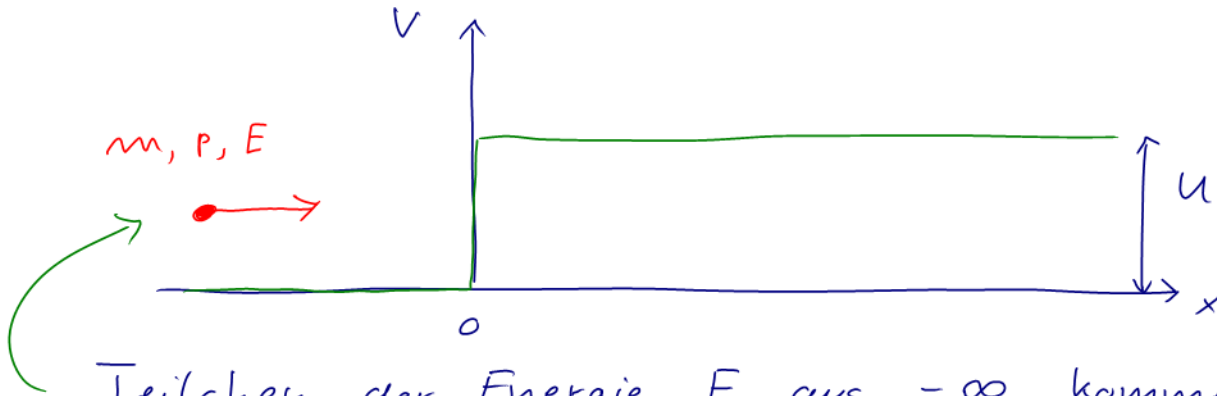
klassisch: Reflexion mit Wkt 1, keine Transmission

quantenmechanisch: Reflexion mit Wkt  $< 1$ , Transmission mit Wkt.  $> 0$  !

Tunneleffekt relevant z.B. für  $\alpha$ -Zerfall, Kernfusion,  
Feldemission

Reflexion u. Transmission an Potenzialstufe:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ U & x \geq 0 \end{cases}$$



Teilchen der Energie  $E$  aus  $-\infty$  kommend treffe auf Potenzialstufe, was geschieht?

klassisch:  $E < U$ : Reflexion mit Wkt 1

$E > U$ : Transmission mit Wkt 1

Quantenmechanisch: ?



quantenmechanische Beschreibung mittels

Streuansatz für Energieeigenfunktion  $\psi(x)$  zur  
Energie  $E$ :

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + \underline{r} e^{-ikx} & : x < 0 \\ \underline{t} e^{i\tilde{k}x} & : x > 0 \end{cases}$$

$r$ : Reflexionskoeffizient  $\rightarrow$  Reflexionswkt.

$$R = |r|^2$$

$t$ : Transmissionskoeffizient

$k, \tilde{k}$ : Wellenzahlen für  $x < 0$  und  $x > 0$

$$r, t, k, \tilde{k} = ?$$

Zeitunabhängige Schrödingergleichung:

$$E \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + V \psi$$

$$\Leftrightarrow \psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi$$

erfüllt (für  $x \neq 0$ ) wenn

$$\boxed{k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}}, \quad \boxed{\tilde{k} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E-U)'}}$$

Koeffizienten  $r$  und  $t$  bestimmt durch Stetigkeit von

(i)  $\psi(x)$  in  $x=0$

(ii)  $\psi'(x)$  in  $x=0$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad (i) \quad 1 + r &= t \\ (ii) \quad (1 - r)k &= t\tilde{k} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (i) \\ (ii) \end{aligned}} \right\} \rightarrow (1 - r)k = (1 + r)\tilde{k}$$

$$k - \tilde{k} = (k + \tilde{k})r$$

$$r = \frac{k - \tilde{k}}{k + \tilde{k}}$$

Fallunterscheidung:

$$\underline{E > U}: \quad \rightarrow \quad \tilde{k} = \sqrt{2m(E - U)} \frac{1}{\hbar} \quad \underline{\text{reell}}$$

$$\rightarrow r = \frac{1 - \tilde{k}/k}{1 + \tilde{k}/k} = \frac{1 - \sqrt{\frac{E - U}{E}}}{1 + \sqrt{\frac{E - U}{E}}} \quad \checkmark$$

$$\rightarrow R = r^2 = \begin{cases} 1 - 4\sqrt{\frac{E - U}{E}} & : 0 < E - U \ll E \\ \left(\frac{U}{4E}\right)^2 & : U \ll E \end{cases}$$

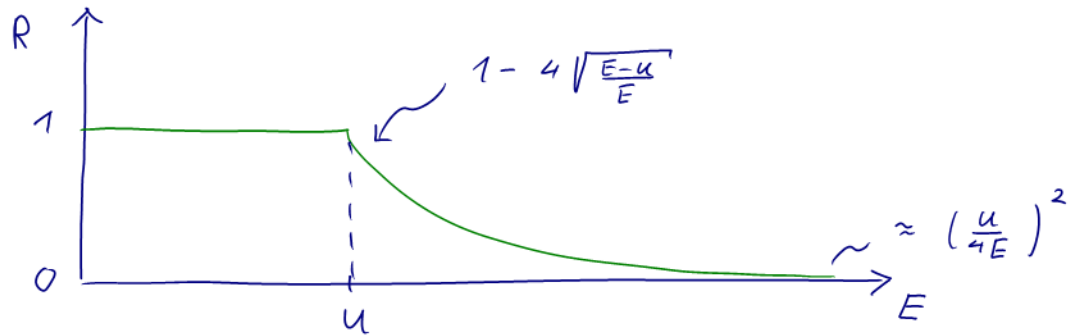
$$\underline{E < U} :$$

$$\tilde{k} = i \underbrace{\sqrt{2m(U-E)}}_{L=q, \text{ reell!}} \frac{1}{\hbar} = iq$$

$$\rightarrow r = \frac{1 - iq/k}{1 + iq/k}$$

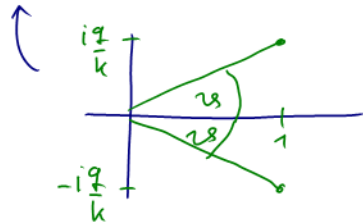
$$\text{d.h. } R = |r|^2 = \underline{\underline{1}}$$

damit erhalten wir folgendes Verhalten der Reflektionswkt  $R$  als Funktion der Teilchenenergie:



Wellenfunktion für  $E < U$ :

$$r = \frac{1 - iq/k}{1 + iq/k} = e^{-i2\vartheta} \quad \text{mit } \vartheta = \arctan q/k$$



$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + e^{-i2\vartheta} e^{-ikx} & : x \leq 0 \\ e^{-qx} & : x > 0 \end{cases}$$



$$\psi(x) = 2e^{-i\vartheta} \begin{cases} \cos(kx + \vartheta) & : x \leq 0 \\ \cos \vartheta \cdot e^{-qx} & : x > 0 \end{cases}$$

$e^{ia} + e^{-ia} = \cos a$ , Stetigkeit bei  $x=0$ !



( $E < U$  !)

$$\sim e^{-2qx} = e^{-x/\lambda}$$

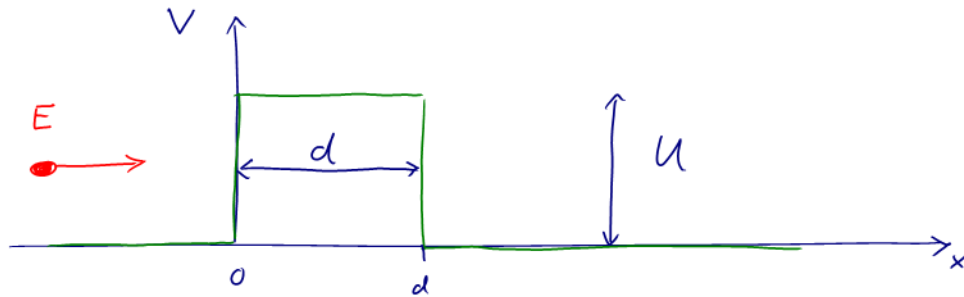
nicht verschwindende Aufenthaltswkt. im klassisch verbotenen Bereich  $x > 0$  !

Eindringlänge:

$$\lambda := \frac{1}{2q} = \frac{\hbar}{\sqrt{8m(U-E)}}$$



# Reflexion und Transmission an Potentialschwelle



Streuanansatz:

$(E < U)$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + \underline{r} e^{-ikx} & : x < 0 \\ \underline{s} e^{-qx} + \underline{u} e^{+qx} & : 0 < x < d \\ \underline{t} e^{kx} & : x > d \end{cases}$$

Transmissionswkt  $T = |t|^2 = 1 - |r|^2$

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

$$q = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}$$

$r, s, u, t$  ?  $\rightarrow$

$r, s, u, t$  bestimmt durch Stetigkeit von  $\psi$  und  $\psi'$  bei  $x = 0$  und  $x = d$ ; führt nach etwas Rechnen auf

$$T = \frac{2 \sin^2 \eta}{\cosh(2q d) - \cos 2\eta} \approx 4 \sin^2 \eta e^{-2q d}$$

$\uparrow$   
 $q d \gg 1$

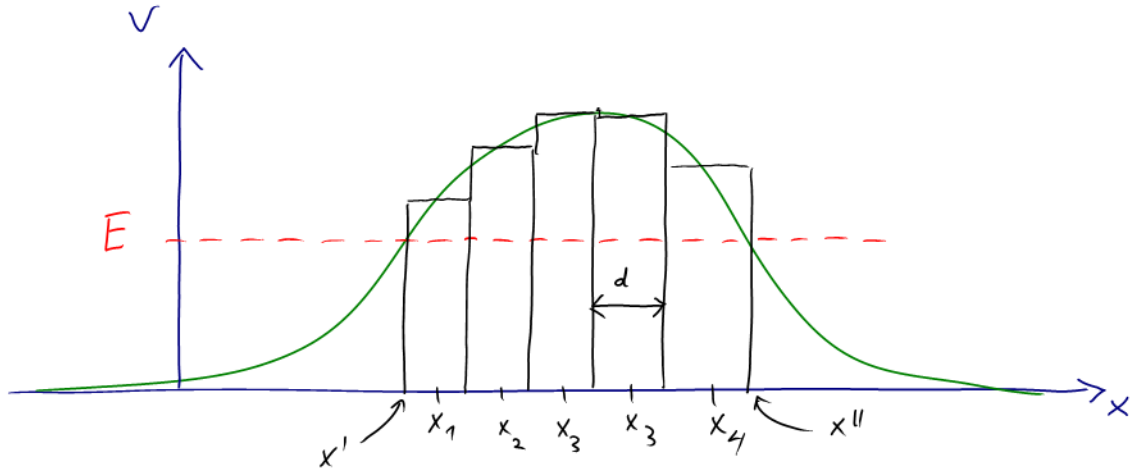
$$(\eta = \arctan \frac{q}{k})$$

wir sind nur am exponentiellen Abfall  $e^{-2q d}$  interessiert und schreiben daher:

$$T = \kappa_{E,u} e^{-\frac{\sqrt{8m(U-E)}}{\hbar} d}$$

enthält nicht-exponentielle Abhängigkeit von  $E$  und  $U$

# Abschätzung der Tunnelwkt. für bel. Potenzialbarriere $V(x)$ :



Tunneln durch  $j$ -te Potenziialschwelle:  $V_j = V(x_j)$ ,  $q_j = \sqrt{2m(V_j - E)} \frac{1}{\hbar}$

$\rightarrow$  Wkt.  $\underline{T_j} = e^{-2 \underline{q_j d}}$

Tunneln durch alle Potenziialschwellen mit Wkt.

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n = \exp\left(-2 \sum_{j=1}^n q_j d\right)$$



für  $d \rightarrow 0$  :

$$\sum_{j=1}^n \underline{q_j} d = \int_{x'}^{x''} \underline{dx} \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V(x) - E)}$$

$q_j = \sqrt{2m(V(x_j) - E)} \frac{1}{\hbar}$

→

$$T \approx \exp \left( - \frac{1}{\hbar} \int_{x'}^{x''} dx \sqrt{2m(V(x) - E)} \right)$$

↑  
Abschätzung der Tunnelwahrs nach Gamov

┌ mathematisch genauere Ableitung desselben Resultats  
mittels Methode von Wentzel, Kramers, Brillouin (WKB) ─┐