Harmonischer Oszillator

etwas vereinfachende, dafür aber allgemeine Charakterisierung:

jedes schwingfähige System, dessen Schwingungsfrequenzen ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz ω_0 sind.

(→ „harmonische" Schwingungen)

Grundfrequenz ω_0 $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ Eigenenergien E_n

<u>Quantenschwebung</u>: <u>Differenzen</u> der Eigenenergien eines harm.
(vgl. Vrl. 14) Oszillators der Frequenz ω_0 sind <u>ganzzahlige Vielfache</u> von $\hbar\omega_0$

[denn <u>andernfalls</u> sollte es Quantenschwebung mit Frequenz $\omega = \Delta E/\hbar \neq n\,\omega_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ geben, die es beim <u>harmonischen</u> Oszillator aber nicht geben kann!]

<u>deshalb naheliegend</u>: die Eigenenergien eines harmonischen Oszillators der (Grund-) Frequenz ω_0 sind genau

$$\boxed{E_n = E_0 + \hbar\omega_0\, n} \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Wir zeigen für den Fall eines 1D mechanischen harm. Oszillators mit Hamiltonian ($\equiv$ Hamilton-Operator)

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2}$$

folgendes:

(i) $\psi_0(x) = (\pi \ell^2)^{-1/4} e^{-x^2/2\ell^2}$ ist Eigenfunktion zur Eigenenergie $\underline{\underline{E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0}}$, wobei $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

(ii) ist $\psi_n(x)$ Energieeigenfkt. zur Eigenenergie E_n, so ist

$$\psi_{n+1}(x) := \left(\frac{x}{\ell} - \ell\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_n(x)$$

Energieeigenfkt. zur Eigenenergie $\underline{\underline{E_{n+1} = E_n + \hbar\omega_0}}$ (bis auf Normierung!)

Unter Annahme, dass $|\psi_0\rangle$ Grundzustand, folgt somit:

Die Eigenenergien eines harm. Oszillators der Frequenz ω sind

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots} \; ,$$

die Grundzustandswellefkt. lautet

$$\boxed{\psi_0(x) = (\pi \ell^2)^{-1/4} \, e^{-x^2/2\ell^2}} \; , \qquad (1)$$

die Energieeigenfkt.en $\psi_n(x)$ für $n>0$ folgen aus (1) per Iteration der Beziehung (ii).

zu (i): zu zeigen ist:
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m\omega^2}{2}x^2\right)\psi_0(x)\stackrel{!}{=}\frac{\hbar\omega}{2}\psi_0(x)$$

Multiplikation mit $\frac{2}{\hbar\omega}$ führt wegen $\ell^2=\hbar/m\omega$ zur äquivalenten DGL:

$$\left(-\ell^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{x^2}{\ell^2}\right)\psi_0(x)\stackrel{!}{=}\psi_0(x),$$

aufgrund $-\ell^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{-x^2/2\ell^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,e^{-x^2/2\ell^2}\right)=\left(-\frac{x^2}{\ell^2}+1\right)e^{-x^2/2\ell^2}$

und $\int dx\, e^{-x^2/\ell^2}=\sqrt{\pi}\,\ell$ ist $\psi_0(x)=(\pi\ell)^{-1/4}e^{-x^2/2\ell^2}$

normierte Eigenfunktion zum EW $\frac{\hbar\omega}{2}$ ✓

zu (ii): wir gehen indirekt vor: $\left(\frac{x}{\ell} - \ell \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{x}{\ell} - \frac{i\ell}{\hbar}\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$

ist Ortsdarstellung (d.h. in Wirkung auf Ortswellenfktn) des

Operators
$$A := \frac{1}{\ell} x - \frac{i\ell}{\hbar} p \quad .$$

Demnach ist zu zeigen: Ist $|\psi_n\rangle$ Energieeigenzust. zur Energie E_n,

so ist $A|\psi_n\rangle$ Energieeigenzust. $E_n + \hbar\omega$

Sei also $|\psi_n\rangle$ Eigenzust. von $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$ mit Eigenwert E_n, d.h.

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \quad .$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{HA|\psi_n\rangle}} = (\underbrace{HA - AH}_{=[H,A]} \underbrace{- AH + AH}_{=0})|\psi_n\rangle = [H,A]|\psi_n\rangle + A\overbrace{H|\psi_n\rangle}^{=E_n|\psi_n\rangle}$$

$$= \underline{\underline{[H,A]|\psi_n\rangle}} + \underline{\underline{E_n A|\psi_n\rangle}} \qquad (*)$$

$[H, A]$ berechnen wir mittels $[x, p] = i\hbar$:

$$= \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 , \frac{x}{\ell} - i\frac{\ell}{\hbar} p \right] = \frac{1}{2m\ell} \underbrace{[p^2, x]}_{\substack{= \\ 2p[p,x] = -2pi\hbar}} - i\frac{m\omega^2 \ell}{2\hbar} \underbrace{[x^2, p]}_{\substack{= \\ 2x[x,p] = 2xi\hbar}}$$

$$= -i\frac{\hbar}{m\ell} p + m\omega^2 \ell x$$

$$= \hbar\omega \left(\underbrace{\frac{m\omega}{\hbar}}_{\substack{= \\ \frac{1}{\ell^2}}} \ell x - i \underbrace{\frac{\hbar}{m\omega}}_{\substack{= \\ \ell^2}} \frac{1}{\ell} \frac{p}{\hbar} \right) = \hbar\omega \left(\frac{x}{\ell} - i\frac{\ell}{\hbar} p \right) \stackrel{!}{=} \hbar\omega A$$

Gleichung (*) wird damit zu: $H A|\psi_n\rangle = \hbar\omega A|\psi_n\rangle + E_n A|\psi_n\rangle$

$$= (\hbar\omega + E_n) A|\psi_n\rangle$$

$A|\psi_n\rangle$ ist also Eigenzustand (bis auf Normierung) zu H mit Eigenwert $E_n + \hbar\omega$. ∎