Quantenmechanik zusammengesetzter Systeme

AB

A : $\mathcal{H}_A$ mit ONB $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$

B : $\mathcal{H}_B$ mit ONB $|\chi_1\rangle, \dots, |\chi_m\rangle$

$\mathcal{H}_{AB} \overset{!}{=} \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit ONB

$$\{ |\varphi_i \chi_j\rangle \}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

- $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$: „Tensorprodukt von $\mathcal{H}_A$ und $\mathcal{H}_B$"
- $|\varphi_i \chi_j\rangle \equiv |\varphi_i\rangle|\chi_j\rangle \equiv |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle \equiv \varphi_i \otimes \chi_j$
- offenbar $\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = \dim \mathcal{H}_A \cdot \dim \mathcal{H}_B$

- das Tensorprodukt zweier Zustände (Vektoren)

$$|\psi_A\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, |\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}_A$$

$$|\psi_B\rangle = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \, |\chi_j\rangle \in \mathcal{H}_B$$

ist def. durch

$$|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \, |\varphi_i \chi_j\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

- Skalarprodukt zweier Zustände

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, |\varphi_i \chi_j\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$|\phi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \, |\varphi_i \chi_j\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad :$$

$$\langle \psi_{AB} | \phi_{AB} \rangle = \sum_{i} \sum_{j} a_{ij}^{*} \, b_{ij} \qquad (\text{da } \{|\varphi_i \chi_j\rangle\} \ \underline{\text{ONB}})$$

Quantenmechanische Verschränkung (Schrödinger, 1935)

Def: a) Zustand $|\psi_{AB}\rangle$ separabel

$:\Leftrightarrow$ es gibt $|\psi_A\rangle$ und $|\psi_B\rangle$ derart, dass

$$|\psi_{AB}\rangle \overset{!}{=} |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$$

b) Zustand $|\psi_{AB}\rangle$ verschränkt

$:\Leftrightarrow$ $|\psi_{AB}\rangle$ nicht separabel.

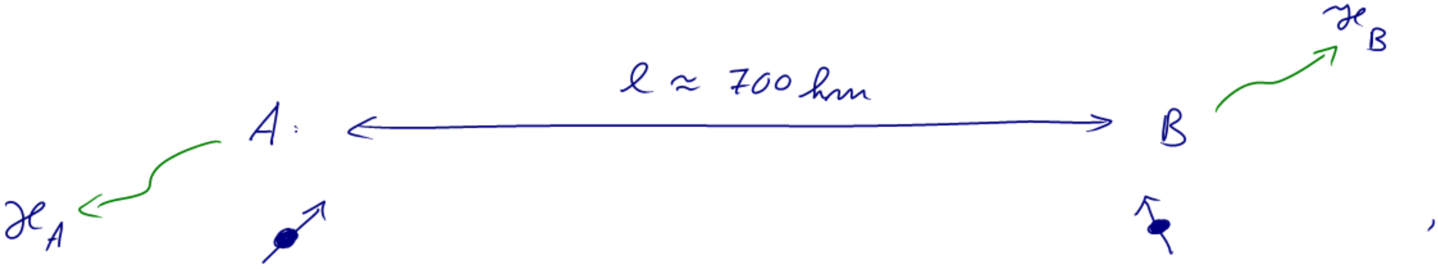
ein verschränkter Zustand $|\psi_{AB}\rangle$ zweier Systeme A und B in großer Entfernung ist der Hauptdarsteller im

$\boxed{\text{Einstein - Podolsky - Rosen - Paradoxon (1935)}}$ $\rightarrow$

Einstein - Podolsky - Rosen - Paradoxon (1935)

(in der Fassung von D. Bohm, 1951)

Anke in Aachen und Bernd in Berlin besitzen
je ein Ag-Atom A bzw B,



im <u>verschränkten Zustand</u>

$$\boxed{|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+ \psi_-\rangle - |\psi_- \psi_+\rangle\right)}$$

betrachte folgende zwei Experimente (I) und (II):

(I) Anke misst zur Zeit $t=0$ die Größe μ_z;

<u>QM</u>: Messergebnis <u>unbestimmt</u>:

$\mu_z = +\mu_0$ <u>oder</u> $\mu_z = -\mu_0$ mit

Wahrscheinlichkeit jeweils $1/2$!

Da gemäß QM <u>physikalischer Zustand</u> von AB vollständig durch $|\psi_{AB}\rangle$ beschrieben ist (P1), muss diese Unbestimmtheit des Messausgangs eine fundamentale Eigenschaft des Systems sein.

(II) Anke misst wieder zur Zeit $t=0$ die Größe μ_z, jetzt misst aber zudem Bernd <u>kurz</u> zuvor bei $t = -\Delta t$ mit $\Delta t < \ell/c$ ebenfalls die Größe μ_z (an seinem Atom B):

<u>QM</u>: Bernd erhält mit Wkt $p_+ = 1/2$ das Ergebnis $\mu_z = -\mu_0$ und schließt, dass unmittelbar danach (also noch <u>bevor</u> Anke ihr Atom misst) AB im Zustand $|\psi'_{AB}\rangle = |\psi_+ \psi_-\rangle$; d.h. Bernd weiß, dass Anke $\mu_z = +\mu_0$ messen wird.

Falls Bernd $\mu_z = +\mu_0$ erhält, folgt $|\psi'_{AB}\rangle = -|\psi_- \psi_+\rangle$ und Anke wird $-\mu_0$ messen.

Fazit: bevor Anke Atom A misst, weiß Bernd bereits anhand seiner Messung an Atom B das Messergebnis von Anke!

Einstein, Podolsky und Rosen argumentieren:

Bernds Messung kann wegen $\Delta t < l/c$ nach SRT keinen Einfluss auf Ankes Atom zur Zeit $t=0$ gehabt haben; d.h. Ankes Messergebnis muss auch ohne Bernds Messung schon festgestanden haben!

→ die in (I) beobachtete Unbestimmtheit ist also nicht fundamental wie von QM behauptet, sondern in der Unvollständigkeit der q.m. Beschreibung begründet!

(EPR!)

Idee: Es gibt „verborgene Variablen" einer noch zu findenden „neuen Theorie", die den tatsächlichen Ausgang eines Experiments (etwa I) bestimmen! (*)

→ quantitative und damit experimentell überprüfbare Folgerung:

Bellsche Ungleichungen (J. S. Bell, 1964)

Zur Ableitung einer dieser Ungleichungen betrachten wir folgende Situation unter Annahme (*):

Anke:	Bernd:
misst wahlweise Größen Q oder R mit mögl. Messwerten $q = \pm 1$ und $r = \pm 1$.	misst wahlweise Größen S oder T mit mögl. Messwerten $s = \pm 1$ und $t = \pm 1$.

Anke und Bernd führen sehr viele Messungen zufällig gewählter Größen Q / R bzw. S / T an einem jeweils gleich präparierten, gemeinsamen System AB aus (wie im EPR) $\longrightarrow$ Messreihen ermöglichen Bestimmung des Mittelwerts M der Größe

$$\boxed{QS + RS + RT - QT}$$

Nach Annahme (*) sind q, r, s und t durch Anfangswerte der verborgenen Variablen bestimmt; wir kennen diese nicht, können aber behaupten, dass sie einer (wenn auch unbekannten) Anfangsverteilung genügen; mittels der „wahren" Theorie folgt hieraus die Wkt

$$p(q, r, s, t)$$

dafür, dass bei Messung von Q, R, S, T genau q, r, s und t ermittelt werden.

Allein durch die Existenz dieser Wkt. folgt CHSH-Ungleichung:

$$\boxed{M := \overline{QS} + \overline{RS} + \overline{RT} - \overline{QT} \leq 2}$$

(Clauser, Horne, Shimony, Holt 1969))

Γ denn

$$M = \sum_{q,r,s,t=\pm 1} p(q,r,s,t)\,(qs + rs + rt - qt)$$

$$= \sum_{q,r,s,t=\pm 1} p(q,r,s,t)\,\underbrace{\big(\underbrace{(q+r)}\,s + (r-q)\,t\big)}_{\leq 2 \;!}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & \overset{!}{\longrightarrow} & 0 \\ 0 & \overset{!}{\longleftarrow} & 2 \end{array}$$

} Lokalität! i.S.d. SRT

$$\leq 2 \sum_{q,r,s,t=\pm 1} p(q,r,s,t) = 2 \,. \qquad \lrcorner$$

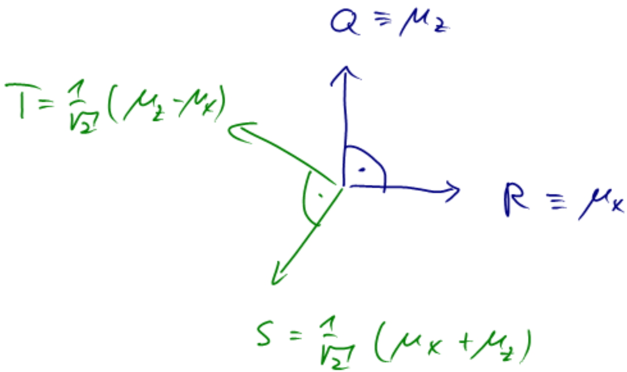
CHSH-Ungleichung gilt insbesondere für Atome A und B im Zustand wie oben,

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+ \psi_-\rangle - |\psi_- \psi_+\rangle \right) ,$$

und speziell gewählten Größen $(\mu_0 \equiv 1)$

$$Q = \mu_z \qquad S = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_z + \mu_x)$$

$$R = \mu_x \qquad T = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_z - \mu_x)$$



wir können M direkt mittels QM ausrechnen:

QM:

$$M_{QM} \overset{!}{=} \underbrace{\langle QS \rangle_{\psi_{AB}}}_{= 1/\sqrt{2}} + \underbrace{\langle RS \rangle_{\psi_{AB}}}_{= 1/\sqrt{2}} + \underbrace{\langle RT \rangle_{\psi_{AB}}}_{= 1/\sqrt{2}} - \underbrace{\langle QT \rangle_{\psi_{AB}}}_{= -1/\sqrt{2}} \overset{!}{=} 2\sqrt{2}$$

etwas Rechnung!

CHSH:

$$M \leq 2$$

?!?

Was sagt das Experiment?

Experimente:

beginnend mit Aspect, Dalibard, Roger, 1982,
heute klare experimentelle Evidenz für Verletzung der CHSH-Ungl. und zugleich Bestätigung der QM.

Fazit: jede deterministische Theorie mit lokalen verborgenen Variablen steht im Widerspruch zum Experiment!

Bemerkung: im Beweis der CHSH-Ungl. wurde bei (**) die <u>Lokalität</u> (im Sinne der SRT) der verborg. Variablen vorausgesetzt!