

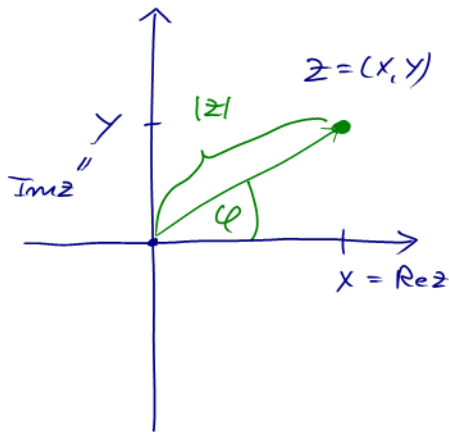
Mathematik

- komplexe Zahlen
- komplexer Vektorraum
- hermitesches Skalarprodukt
- Lineare Abbildungen
("Operatoren")
- Eigenwert und Eigenvektor

Vokabular der
Quantenmechanik!

Komplexe Zahlen (Wiederholung)

geometrisch: komplexe Zahl z $\equiv$ Punkt (x, y) der (reellen)
zweidim. Zahlenebene
 $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$



• Realteil: $\operatorname{Re} z = x$

• Imaginärteil: $\operatorname{Im} z = y$

• Betrag: $|z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$

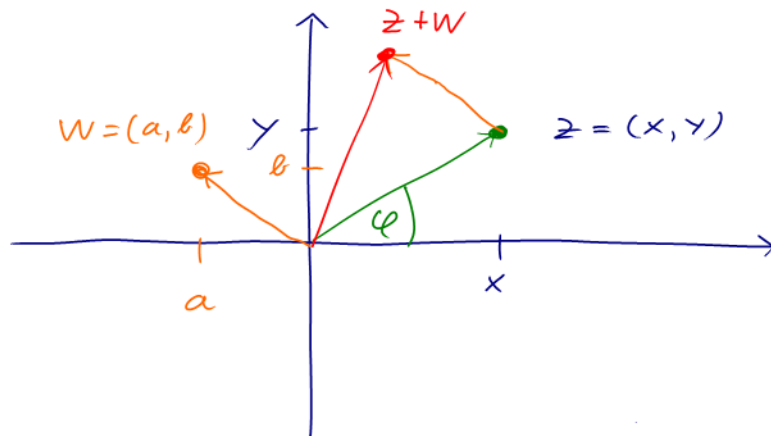
• Argument: $\arg z \equiv \varphi = \angle((1, 0), z)$

→ Polardarstellung: $z = (|z| \cos \varphi, |z| \sin \varphi) = |z| (\cos \varphi, \sin \varphi)$

- Addition $\equiv$ Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$:

$$z = (x, y), \quad w = (a, b)$$

$$\rightarrow z + w = (x + a, y + b)$$



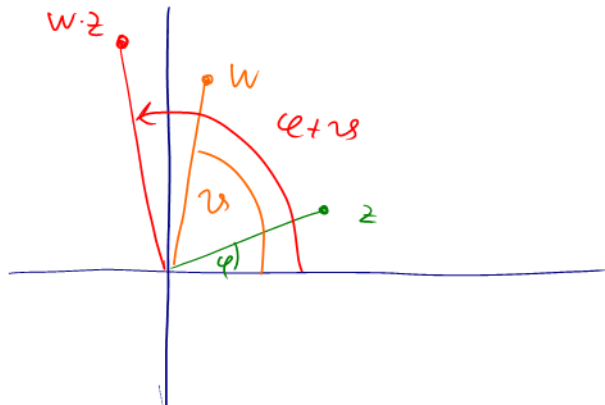
- Multiplikation :

$$\begin{array}{ccc} w \cdot z & := & (ax - by, \quad ay + bx) \\ \text{"} & & \text{"} \\ (a, b) & & (x, y) \end{array}$$

genügt den üblichen Multiplikationsregeln: $\cdot \quad z \cdot w = w z$

$$\cdot \quad z(w + u) = zw + zu$$

geometrische Bedeutung:



- $|wz| = |w| |z|$

- $\arg(wz) = \arg w + \arg z$

Konventionen:

- „ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ “:

$$x \equiv (x, 0)$$

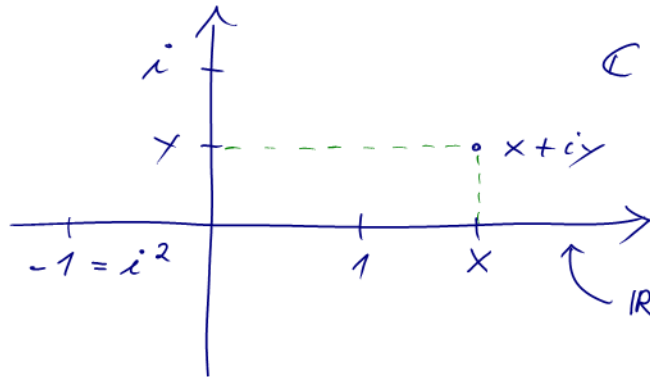
- imaginäre Einheit:

$$i := (0, 1)$$

→

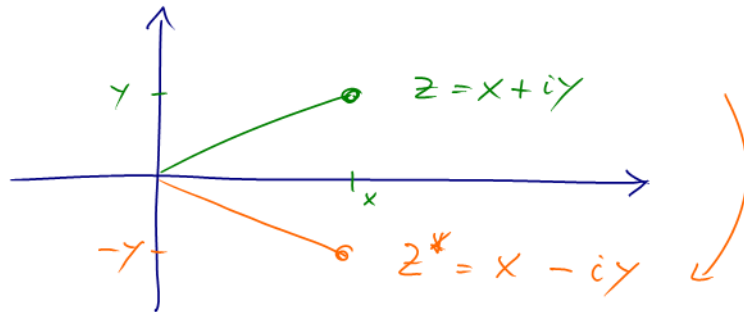
$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = \underline{x + iy}$$

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$



komplexe Konjugation:

geometrisch: Spiegelung an reeller Achse



$$z = x + iy \xrightarrow[\text{Konj.}]{\text{kompl.}} \boxed{z^* := x - iy}$$

Anwendungen:

$$\bullet \quad |z|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = z z^*$$

$$\boxed{|z|^2 = z^* z}$$

$$\bullet \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2} (z + z^*) \quad , \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} (z - z^*)$$

$$\bullet \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

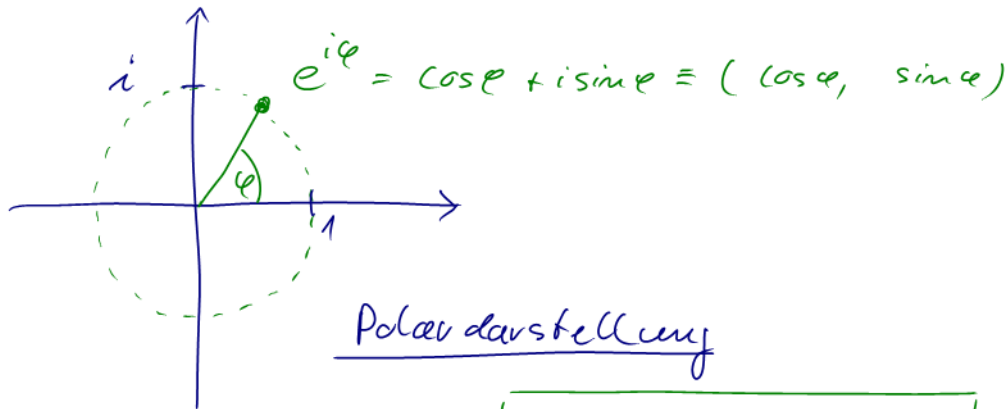
komplexe Exponentialfunktion:

$$\exp(z) \equiv e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Euler - Identität:

für $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (\text{vgl. Übungen})$$



Polar darstellung

$$z = |z| e^{i \arg z}$$

- $i = e^{i\pi/2}$
- $-1 = e^{i\pi}$
- $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$
- für $n \in \mathbb{Z}$:
$$e^{i2\pi n} = 1$$