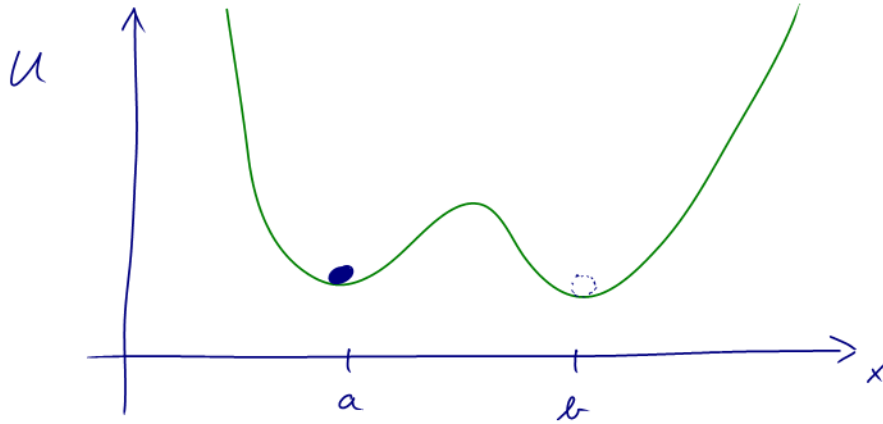


Komplexer Vektorraum

Hintergrund: wesentliche Eigenschaft der "Mikrophysik":

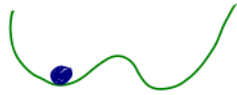
Zustände können sich "überlagern"!

Beispiel: Teilchen im Doppelmuldenpotenzial $U(x)$



betrachte Grund-
zustand ($\equiv$ Zustand
minimaler Energie)

Klassische Physik: Teilchen entweder in linker Mulde
($x=a$) oder in rechter Mulde ($x=b$)



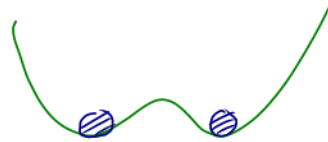
(L)

oder



(R)

Quantenmechanik: Teilchen zugleich in linker und
rechter Mulde:



$\hat{=}$ Überlagerung (Superposition) der "klassischen" Zustände

(L)

und

(R)

?!

Was soll das genau bedeuten?

klass. Anschauung: "Teilchen kann ja nicht zugleich bei $x=a$ und $x=b$ sein!"

Quantenmechanik:

Zustandsraum $\hat{=}$ Vektorraum !

→ Teilchenzustände (etwa (L) und (R)) können per Vektoraddition kombiniert werden:

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{G} & \stackrel{\nabla}{=} & \textcircled{L} + \textcircled{R} & (*) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow & \\ \text{welle mit 2 Teilchen} & \stackrel{!}{=} & \text{welle mit 1 Teilchen} + \text{welle mit 1 Teilchen} & (**) \end{array}$$

(*) ebenso unanschaulich wie (**), dafür aber math. exakt definiert!

→ benötigen komplexen Vektorraum !

Definition :

komplexer Vektorraum := Menge $\mathcal{H}$ mit erklärter

Vektoraddition : $a, b \in \mathcal{H} \rightarrow a + b \in \mathcal{H}$

kompl. Skalarmultiplikation : $a \in \mathcal{H}, \lambda \in \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \lambda a \in \mathcal{H}$

davon, dass :

$$(a+b) + c = a + (b+c), \quad a+b = b+a,$$

$$a + 0 = a$$

↑ Nullvektor

$$a + (-a) = 0$$

↑ Inverses zu a

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu) a, \quad (\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$$

$$1a = a; \quad \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$$

das sind genau die Eigenschaften der Addition und Skalarmultiplikation von geometrischen (= anschaulichen) Vektoren !

Begriffe :

- Vektor = Element eines Vektorraums
- Linearkombination der Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{H}$ mit kompl. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ist der Vektor


$$\boxed{v = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n} \in \mathcal{H}$$

(in Summenschreibweise $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k$)

sehr hilfreich: jeder Vektorraum $\mathcal{H}$ besitzt eine

- Basis = (minimale) Menge von Vektoren $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \subset \mathcal{H}$ derart, dass jeder Vektor $v \in \mathcal{H}$ durch

$$v = v_1 \varphi_1 + v_2 \varphi_2 + \dots + v_n \varphi_n \quad \left(= \sum_{\ell=1}^n v_\ell \varphi_\ell \right)$$

eindeutig dargestellt werden kann.

- Komponentendarstellung von v bzgl. Basis B
- $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{C}$ = Komponenten von v bzgl. Basis B
- n = Dimension von $\mathcal{H}$
- Tupelschreibweise:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_B \quad \left(= \sum_{\ell} v_\ell \varphi_\ell \right)$$

Beispiel:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 = \{ (z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \}$$

mit Vektoraddition $\underset{\substack{\text{"} \\ (z_1, z_2)}}{z} + \underset{\substack{\text{"} \\ (w_1, w_2)}}{w} := (z_1 + w_1, z_2 + w_2)$ und

kompl. Skalarmultipl. $\lambda z := (\lambda z_1, \lambda z_2)$;

eine Basis ist etwa $B = \{ \varphi_1 = (1, 0), \varphi_2 = (0, 1) \}$

$$\rightarrow z = (z_1, z_2) = z_1 \varphi_1 + z_2 \varphi_2 \quad ; \quad \text{d.h.} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}_B ;$$

eine andere Basis wäre $B' = \{ \psi_1 = (1, 1), \psi_2 = (1, -1) \}$,

$$\rightarrow z = (z_1, z_2) = \frac{z_1 + z_2}{2} \psi_1 + \frac{z_1 - z_2}{2} \psi_2 \quad ; \quad (\text{mach rechnen!})$$

$$\text{d.h.} \quad z = \begin{pmatrix} \frac{z_1 + z_2}{2} \\ \frac{z_1 - z_2}{2} \end{pmatrix}_{B'}$$

beachte : Komponenten eines Vektors hängen immer von der gewählten Basis ab !

im Beispiel etwa für $v = (i, 2+i) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} i \\ 2+i \end{pmatrix}_B = v = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix}_{B'} \quad (\text{nachrechnen!})$$