Hermitesches Skalarprodukt

Hintergrund: Superpositionsfähigkeit mikroskopischer Zustände erfordert Vektorraum als Zustandsraum (s.o.).

→ Maß für die Ähnlichkeit von Zuständen ?

Quantenmechanik: Ähnlichkeit zweier Zustände a und b ist durch den "Winkel" zwischen den entsprechenden Zustandsvektoren gegeben!

→ benötigen "Geometrie" für den komplexen Vektorraum!

$\downarrow$

$\mathcal{H}$

diese Geometrie erhalten wir durch :

hermitesches Skalarprodukt $\equiv$

Abb. $\langle \ldots , \ldots \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \langle \varphi, \psi \rangle$$

mit definierenden Eigenschaften

(1) Linearität im zweiten Faktor:

- $\langle \varphi, \psi_1 + \psi_2 \rangle \stackrel{!}{=} \langle \varphi, \psi_1 \rangle + \langle \varphi, \psi_2 \rangle$
- $\langle \varphi, \lambda \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle$

(2) Symmetrie (bis auf kompl. Konjugation):

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle^*$$

(3) Positivität:

$$\langle \psi, \psi \rangle > 0 \quad \text{für } \psi \neq 0 \quad \text{und} \quad \langle 0, 0 \rangle = 0$$

<u>beachte</u> : aus (1) und (2) folgt

$$\langle \lambda \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \lambda \varphi \rangle^* = (\lambda \langle \psi, \varphi \rangle)^* = \lambda^* \langle \psi, \varphi \rangle^*$$

d.h. $\boxed{\langle \lambda \varphi, \psi \rangle = \lambda^* \langle \varphi, \psi \rangle}$,

ebenso $\boxed{\langle \varphi_1 + \varphi_2, \psi \rangle = \langle \varphi_1, \psi \rangle + \langle \varphi_2, \psi \rangle}$

herm. Skal.-produkt gibt dem kompl. VR $\mathcal{H}$ "Geometrie":

- φ orthogonal ψ $:\Longleftrightarrow$ $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$
- Norm / Betrag von φ : $\|\varphi\| := \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$

$\longrightarrow$ „Projektion auf φ":

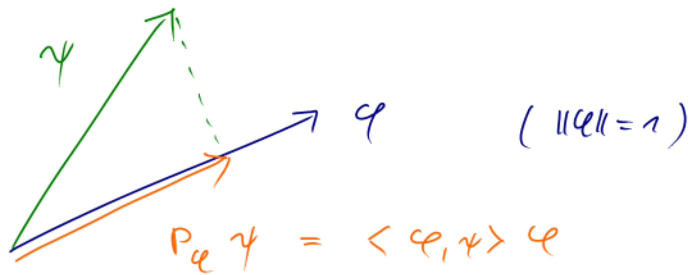
$$P_\varphi \psi = \langle \varphi, \psi \rangle \varphi \qquad (\text{wenn } \|\varphi\| = 1)$$

erfüllt: ψ orthogonal φ $\Longrightarrow$ $P_\varphi \psi = 0$

$\psi = \lambda \varphi$ $\Longrightarrow$ $P_\varphi \psi = \psi$

d.h. ψ parallel φ

"geometrisch" (bis auf „imaginäre Richtungen"):



zweckmäßig für Rechnungen:

Orthonormalbasis (ONB):

Basis $B = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ (eines VRs mit Skalarprodukt) orthonormal $:\Longleftrightarrow$ Basisvektoren $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ normiert und paarweise orthogonal

$$\Longleftrightarrow \quad \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{für } i,j = 1, \dots, n$$

$\rightarrow$ besitzen Vektoren a und b die Komponenten $a_1, \dots, a_n$ bzw. $b_1, \dots, b_n$ bzgl. einer ONB B, so gilt:

$$\boxed{\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i}$$

⌜ da $\langle a, b \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i , \sum_{j=1}^{n} b_j \varphi_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_i \varphi_i , b_j \varphi_j \rangle$

$$= \sum_{i,j} a_i^* b_j \underbrace{\langle \varphi_i , \varphi_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_j$$ ⌟