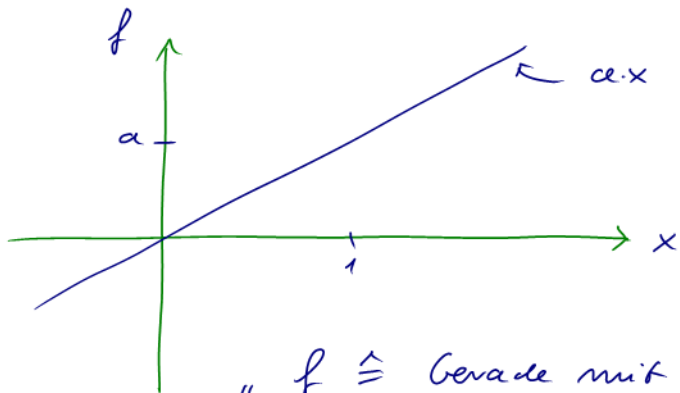


Lineare Abbildungen und Operatoren

Erinnerung: Lineare Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind genau die Funktionen der Form

$$\boxed{f(x) = ax}$$

$$(f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \\ x \mapsto ax$$



" $f \hat{=}$ Gerade mit Steigung a "

→ allg. Eigenschaften einer linearen Funktion f :

$$(i) \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(ii) \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

→ Verallgemeinerung:
lineare Abbildung

Definition:

Abbildung $A: V \rightarrow W$ (V, W Vektorräume)
 $u \mapsto A(u)$

linear : $\Leftrightarrow$ (i) $A(u+v) = A(u) + A(v)$

(ii) $A(\lambda u) = \lambda A(u)$

für alle $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

Beispiel: Projektion auf $\varphi \in \mathcal{H}$ ($\|\varphi\| = 1$)

$P_\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$
 $\psi \mapsto \langle \varphi, \psi \rangle \varphi$

ist linear !

denn: (i) $P_\varphi(\psi + \chi) = \langle \varphi, \psi + \chi \rangle \varphi = \underbrace{\langle \varphi, \psi \rangle \varphi}_{P_\varphi(\psi)} + \underbrace{\langle \varphi, \chi \rangle \varphi}_{P_\varphi(\chi)}$
 $= P_\varphi(\psi) + P_\varphi(\chi)$ ✓

(ii) $P_\varphi(\lambda \psi) = \langle \varphi, \lambda \psi \rangle \varphi = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle \varphi = \lambda P_\varphi(\psi)$ ✓

Sehr häufig benutzte Konvention: keine Argumentklammern
bei linearen Abb.en: statt $A(v)$ nur Av .

Beispiele: $A(v+u) = Av + Au$, $P_e \psi = \langle e, \psi \rangle e$
 $A \sum_i \lambda_i e_i = \sum_i \lambda_i A e_i$.

Operatoren

Eine lineare Abb. $A: V \rightarrow W$ mit $V = W \equiv \mathcal{H}$
(wobei $\mathcal{H}$ i.d.R. der Zustandsvektorraum) nennen wir

Operator (auf $\mathcal{H}$):

$$A: \underline{\mathcal{H}} \rightarrow \underline{\mathcal{H}}$$

Beispiel: Projektion $P_e: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$
 $\psi \mapsto \langle e, \psi \rangle e$

Operatoren kann man addieren, skalarmultiplizieren, multiplizieren, potenzieren und durch Funktionen abbilden :

- Operatoraddition :

$$A + B \quad \text{erhalt durch} \quad (A+B)\varphi = A\varphi + B\varphi$$

- Operatorskalar multiplication :

$$\lambda A \quad \text{erhalt durch} \quad (\lambda A)\varphi = \lambda(A\varphi)$$

- Operator multiplication :

$$AB \quad \text{erhalt durch} \quad (AB)\varphi = A(B\varphi)$$

d.h. $AB = A \circ B$: Verkettenng A nach B

Vorsicht : i. A.

$$AB \neq BA$$



- Operator potenz:

$$A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ mal}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Def. : $A^0 = \mathbb{1}_X \equiv \text{id}_X : \begin{matrix} X \rightarrow X \\ \varphi \rightarrow \varphi \end{matrix}, \text{ Identität}$

(oft $\mathbb{1}_X \equiv 1$)

- Operatorfunktion : $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei durch Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

gegeben, dann

$$f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

Eigenwert und Eigenvektor eines Operators

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert zum Eigenvektor $\psi \in \mathcal{X}$ eines Operators $A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ genau dann, wenn

$$A\psi = \lambda\psi$$

(bitte verstehen, merken und nie wieder vergessen !!!)

d.h.: die Wirkung eines Operators auf einen Eigenvektor ist besonders einfach: nämlich Skalarmultiplikation mit dem entsprechenden Eigenwert λ .

Beispiele: e_1 und e_2 seien orthonormale Vektoren
in $\mathcal{X} = \mathbb{C}^2$, P_1 sei die Projektion auf e_1 , P_2 die auf e_2 ,
 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, dann gilt:

- P_1 hat Eigenwert 1 zum Eigenvektor e_1
und Eigenwert 0 zum Eigenvektor e_2 (warum?)
- P_2 hat Eigenwert 1 zum Eigenvektor e_2
und Eigenwert 0 zum Eigenvektor e_1 (warum?)
- $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$ hat Eigenwert α_1 zum Eigenvektor e_1
und Eigenwert α_2 zum Eigenvektor e_2 (warum?)
- $\cos(\pi P_1)$ hat Eigenwert -1 zum Eigenvektor e_1
und Eigenwert $+1$ zum Eigenvektor e_2 (warum?)
- $P_1 P_2 = 0$; $P_1 + P_2 = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$;