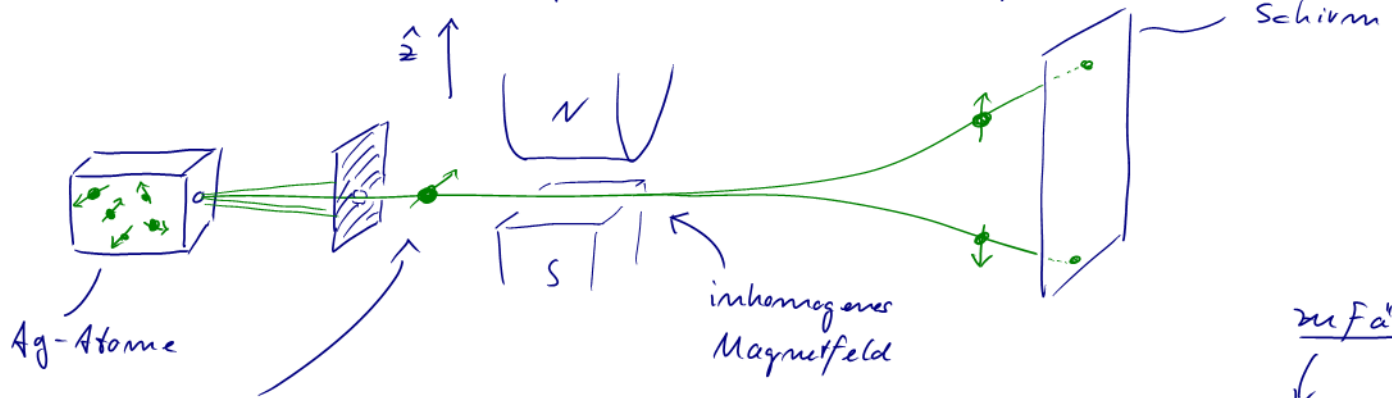


Quantenmechanik eines Zwei-Zustand-Systems:

Stern - Gerlach - Experiment (Frankfurt 1922)



Ag-Atom trägt magnetisches Dipolmoment

zufällig ↓

$$\vec{\mu} = \mu_0 \vec{n} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix}$$

↑
konstant

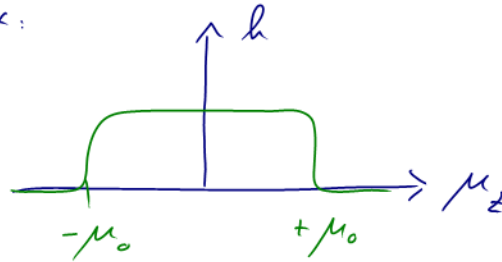
→ erfährt im inhomog. $\vec{B}$ -Feld $\vec{B} \approx B(z) \hat{z}$ Kraft

$$\vec{F} = \underline{\underline{\mu_z}} \cdot B'(z) \hat{z}$$

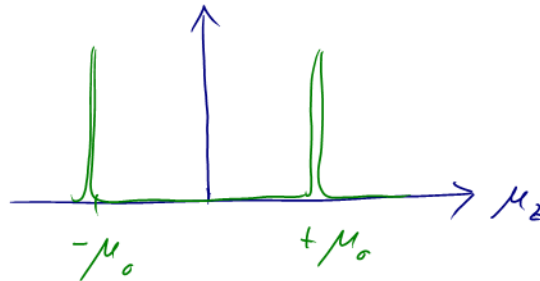
→ Ablenkung in z-Richtung direkt proportional zu μ_z !

„klassische Erwartung“:

- $\hat{n}$ zufällig verteilt $\rightarrow \mu_z$ zwischen $-\mu_0$ und $+\mu_0$
gleichmäßig verteilt:



Experiment: μ_z nimmt i. v. nur Werte $-\mu_0$ und $+\mu_0$ an:



Deutung :

wegen

$$\vec{\mu} \propto \vec{L}$$

↑
mag. Moment

↑ Drehimpuls



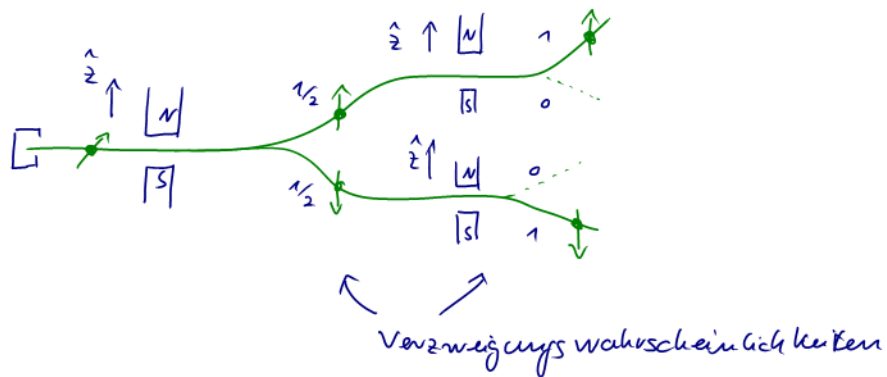
Quantisierung von $\mu_z \hat{=} \text{Quantisierung von } L_z !$

„ Drehimpulsquantisierung “

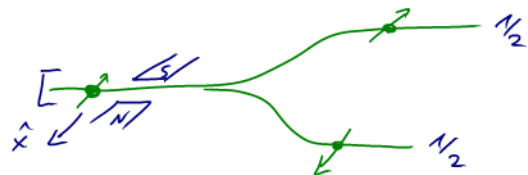
(vgl. Bohrsches
Atommodell)

weitere Experimente (schematisch) :

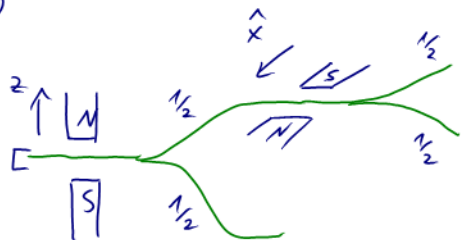
1)



2) Ausrichtung des S.-G.-Magnetes in $\hat{x}$ -Richtung :



3)



etc.

einheitliche Beschreibung dieser und weiterer S.G.-Exp. mittels

"Quantenmechanik des S.G.-Experiments":

Postulate:

(P1) Zustandsraum = zweidimensionaler komplexer
Vektorraum $\mathcal{H}$ mit herm.
Skalarprodukt $\langle \dots, \dots \rangle$
(„ $\mathcal{H}$ Hilbertraum “)

Zustand des Ag-Atoms $\hat{=}$ normierter Vektor $\psi \in \mathcal{H}$

(P2)

Messung und Zustandspräparation

Messung M prüfe das Vorliegen eines Zustands φ_M . Befindet sich Atom im Zustand ψ , dann M mit Wahrscheinlichkeit

$$p = |\langle \varphi_M, \psi \rangle|^2$$

positiv. Nach Messung mit positivem Ausgang ist Atom im Zustand φ_M .

hiermit gelingt folgende Beschreibung der S.G.-Experimente:

Ausgangspunkt:

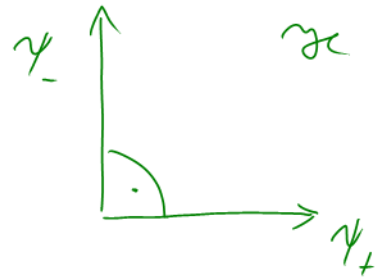
nach Passage durch SG-Magnet im $\hat{z}$ -Richtung
befindet sich Atom entweder

im Zustand " z^+ " ($\mu_z = +\mu_0$) $\hat{=}$ $\psi_+ \in \mathcal{H}$
oder im Zustand " z^- " ($\mu_z = -\mu_0$) $\hat{=}$ $\psi_- \in \mathcal{H}$,

wobei nach (m) $\|\psi_+\| = 1$, $\|\psi_-\| = 1$;

relative Lage von ψ_+ zu ψ_- ?

ψ_+ orthogonal ψ_- !



denn "z+" - Messung an Atom im Zustand "z-"
immer negativ, d.h. mit Wkt 0 positiv ;

(P2) mit $\varphi_n \equiv \psi_+$, $\psi \equiv \psi_-$:

$$0 \stackrel{!}{=} p = |\langle \varphi_n, \psi \rangle|^2 = |\langle \psi_+, \psi_- \rangle|^2$$

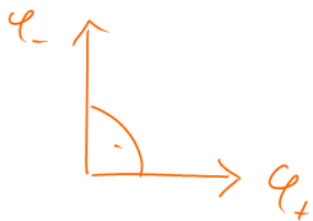
d.h. $\langle \psi_+, \psi_- \rangle = 0$ und somit ψ_+ orthogonal ψ_-

analog für Zustände „ $X+$ “ ($\mu_x = \mu_0$) und „ $X-$ “ ($\mu_x = -\mu_0$) nach Passage eines Atoms durch S.G.-Magnet in X -Richtung:

$$„X+“ \hat{=} \varphi_+ \in \mathcal{H}$$

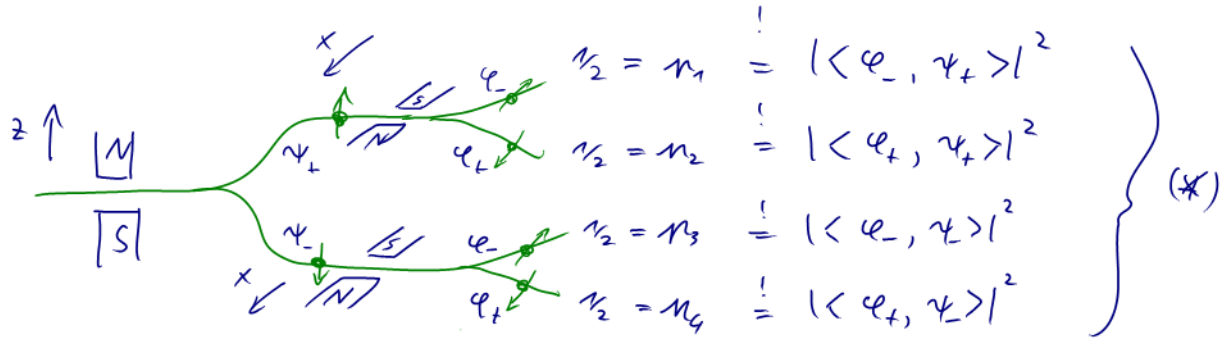
$$„X-“ \hat{=} \varphi_- \in \mathcal{H}$$

mit $\|\varphi_+\| = 1$, $\|\varphi_-\| = 1$ und wiederum φ_+ orthogonal φ_- ;



relative Lage von $\psi_{\pm}$ zu $\varphi_{\pm}$?

→ ergibt sich aus folg. Experimenten:

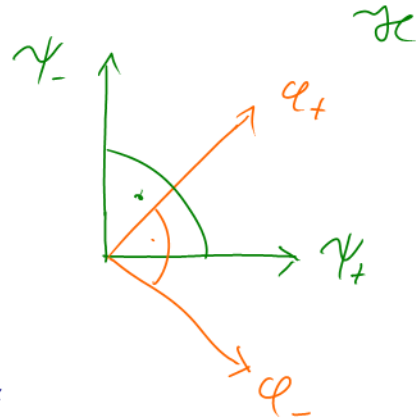


Gleichungen (*) und $\langle \phi_-, \phi_+ \rangle = 0$ erfüllt für

$$\phi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_+ + \psi_-)$$

$$\phi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_+ - \psi_-)$$

$\hat{=}$



Superposition von ψ_+ und ψ_- ergibt Zustände ϕ_+ bzw. ϕ_- !

