

---

# Theoretische Physik II (Lehramt, Nebenfach, Geophysik) Blatt 1

---

Sommersemester 2024

**Webpage:** [http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tpII\\_24.html/](http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tpII_24.html/)

**Abgabe:** bis **Mittwoch, 24.04.24, 23:59** in elektronischer Form per ILIAS unter [https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto\\_uk\\_crs\\_5693591.html](https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5693591.html)

## 1. Zur Diskussion

0 Punkte

Erläutern Sie die Begriffe *komplexer Vektorraum*, *hermitesches Skalarprodukt* und *unitärer Vektorraum*.

## 2. Stern-Gerlach-Experiment

3+2+5=10 Punkte

In  $z$ -Richtung positiv bzw. negativ polarisierte Silberatome seien durch orthonormale Zustandsvektoren  $\varphi_{z+}$  bzw.  $\varphi_{z-}$  beschrieben. Entsprechend in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung polarisierte Atome sind dann beschrieben durch Zustandsvektoren

$$\begin{aligned} \varphi_{x+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} + \varphi_{z-}), & \varphi_{x-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} - \varphi_{z-}), \\ \text{und} \quad \varphi_{y+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} + i\varphi_{z-}), & \varphi_{y-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} - i\varphi_{z-}). \end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie die Skalarprodukte  $\langle \varphi_{x+}, \varphi_{y+} \rangle$ ,  $\langle \varphi_{y+}, \varphi_{y+} \rangle$  und  $\langle \varphi_{y+}, \varphi_{y-} \rangle$ .  
b) Zeigen Sie, dass

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\varphi_{x+} + \varphi_{y+})$$

ein normierter Vektor (und damit ein Zustandsvektor) ist.

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt eine  $\mu_z$ -Messung an einem Silberatom im Zustand  $\psi$  das Ergebnis  $+\mu_0/2$  bzw.  $-\mu_0/2$ ? Wie lauten die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten bei Messung von  $\mu_x$  bzw.  $\mu_y$ ?

## 3. Superposition und Gemisch

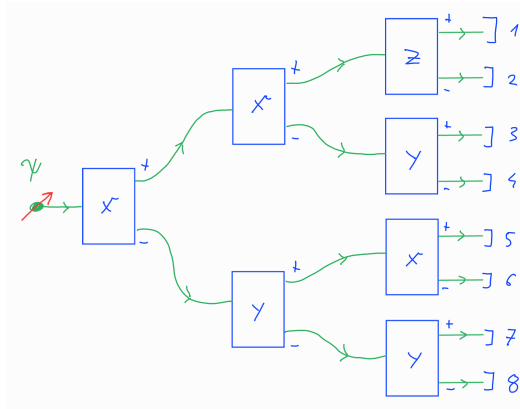
5 Punkte

Eine Quelle  $A$  produziert einen Strahl von Silberatomen, die sich jeweils in der quantenmechanischen Superposition von  $z+$  und  $z-$  polarisierten Zuständen befinden. Eine zweite Quelle  $B$  produziert einen Strahl, dessen Silberatome sich zufällig entweder im Zustand  $z+$  oder  $z-$  befinden, jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$ . Wie können Sie mittels Messungen an den Silberatomen im Strahl entscheiden, ob Quelle  $A$  oder  $B$  vorliegt?

#### 4. Geschachtelte Stern-Gerlach-Magnete

5 Punkte

Die folgende Abbildung zeigt einen Aufbau, in dem mittels geeignt orientierter Stern-Gerlach-Magnete nacheinander die Polarisation des Silberatoms in  $x$ ,  $y$  bzw.  $z$ -Richtung gemessen wird. Nach jeder Messung befindet sich das Silberatom im Zustand der jeweilig gemessenen Polarisation (d.h. die Messungen sind *ideal*). Am Ende wird das Silberatom in einem der Detektoren 1 bis 8 registriert. Zu Beginn ist das Atom im Zustand  $\psi = \varphi_{z+}$ . Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen das Atom in den Detektoren 1 bis 8 registriert wird. Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich für einen Anfangszustand  $\psi = \varphi_{x-}$  ?



#### 5. Operator in Dirac-Notation

5+3+2=10 Punkte

Wir betrachten wieder die Polarisationszustände von Silberatomen, diesmal in Dirac-Notation. In positiver bzw. negativer  $z$ -Richtung polarisierte Zustände bezeichnen wir mit

$$|z+\rangle, \quad |z-\rangle.$$

Die entsprechend in  $x$  bzw.  $y$ -Richtung polarisierte Zustände sind dann

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z+\rangle + |z-\rangle), \quad |x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z+\rangle - |z-\rangle),$$

$$|y+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z+\rangle + i|z-\rangle), \quad |y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z+\rangle - i|z-\rangle).$$

Ferner sei ein Operator  $D$  gegeben durch

$$D = |x+\rangle\langle z+| - |x-\rangle\langle z-|$$

a) Zeigen Sie folgende Beziehungen:

$$D|z+\rangle = |x+\rangle, \quad D|z-\rangle = -|x-\rangle,$$

$$D|x+\rangle = |z-\rangle, \quad D|x-\rangle = |z+\rangle,$$

$$D|y+\rangle = \frac{1-i}{\sqrt{2}}|y+\rangle, \quad D|y-\rangle = \frac{1+i}{\sqrt{2}}|y-\rangle.$$

b) Bestimmen Sie das Quadrat  $D^2 = DD$  des Operators.

c) Welche physikalische Bedeutung hat der Operator  $D$  ?