
Theoretische Physik II (Lehramt, Nebenfach, Geo) Blatt 12

Sommersemester 2024

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tpll_24.html/

Abgabe: bis **Mittwoch, 17.07.24, 23:59** in elektronischer Form per ILIAS unter
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5693591.html

44. Effizientes Heizen

4+1=5 Punkte

Eine fest vorgegebene Menge an Wasserstoff setzt bei direkter, idealer Verbrennung eine Wärmemenge Q_0 frei. Diese Wärme soll zur Beheizung eines Wohnraums genutzt werden. Dazu betrachten wir zwei Varianten:

- (i) Durch Verbrennung des Wasserstoffs in einer Gastherme wird die Wärme Q_0 direkt zur Beheizung genutzt.
- (ii) Die durch Verbrennung des Wasserstoffs erzeugte Wärme Q_0 wird in einem Gaskraftwerk zur Erzeugung von elektrischer Energie (=mechanischer Arbeit) A eingesetzt, und diese wiederum in einer Wärmepumpe genutzt zwecks Bereitstellung von Wärmeenergie Q_1 zur Beheizung des Wohnraums. Das Verhältnis Q_1/Q_0 gibt an, um wieviel Mal Variante (ii) effizienter ist als Variante (i).

- a) Bestimmen Sie Q_1/Q_0 unter idealen Bedingungen: das Kraftwerk verwendet einen Carnot-Prozess, der die Verbrennungswärme Q_0 des Wasserstoffs bei einer Temperatur von $T_B = 600^\circ\text{C}$ nutzt und die Abwärme bei einer Temperatur $T_A = 20^\circ\text{C}$ abführt. Die Wärmepumpe realisiert einen inversen Carnot-Prozess, der die Heizwärme Q_1 bei einer Temperatur $T_H = 35^\circ\text{C}$ bereitstellt und dazu ein Wärmereservoir der Temperatur $T_R = 0^\circ\text{C}$ nutzt.
- b) Unter realen Bedingungen erreicht ein Gaskraftwerk bei den in **a)** angegebenen Temperaturen einen Wirkungsgrad von $\eta \approx 0.60$, die Wärmepumpe eine Leistungszahl (cop) von $\varepsilon \approx 4.5$. Wie groß ist dann das Verhältnis Q_1/Q_0 ?

45. Entropiezunahme

6+3+6=15 Punkte

In dieser Aufgabe analysieren wir das Anwachsen der Entropie eines Paramagneten im Nichtgleichgewicht. Dazu wollen wir zeigen, dass ein gewisser Makrozustand A_l mit nicht-maximaler Entropie $S(A_l)$ während eines Zeitintervalls Δt wesentlich wahrscheinlicher in einen Makrozustand A_{l-1} mit höherer Entropie $S(A_{l-1})$ übergeht als in einen Makrozustand A_{l+1} mit niedrigerer Entropie $S(A_{l+1})$.

Der Paramagnet ist gegeben durch N Spins $s_1, \dots, s_N$ in den Zuständen $s_i = \pm 1$. Ein Mikrozustand ist demnach gegeben durch die Spinkonfiguration $s = (s_1, \dots, s_N) \in \{-1, 1\}^N =: \Gamma$. Mittels der Magnetisierung per Spin,

$$m(s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i,$$

definieren wir Makrozustände A_l für $l = 1, 2, \dots, r-1$ gemäß

$$A_l := \left\{ s \in \Gamma \mid \frac{l}{r} \leq m(s) < \frac{l+1}{r} \right\}.$$

Hierbei ist r eine ganze positive Zahl. Für $r \gg 1$ ist also A_l der Makrozustand mit mittlerer Magnetisierung l/r per Spin.

- a) Zeigen Sie, dass bis auf (vernachlässigbare) logarithmische Korrekturen von Ordnung $\ln N$ die Entropie der Makrozustände gegeben ist durch

$$S(A_l) = KNh\left(\frac{1}{2} + \frac{l}{2r}\right).$$

$h(x)$ bezeichnet wie immer die *binäre Entropie* $h(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$.

- b) Der Paramagnet befinde sich zur Zeit t_0 im Zustand A_{l_0} mit $0 < l_0 < r-1$. Während des Zeitintervalls $[t_0, t_0 + \Delta t]$ folgt nun der Zustand einer quasi-stochastischen Dynamik und befindet sich dann zur Zeit $t + \Delta t$ mit einer Wahrscheinlichkeit p_+ im Zustand A_{l_0+1} und mit Wahrscheinlichkeit p_- im Zustand A_{l_0-1} . Argumentieren Sie, dass

$$\frac{p_-}{p_+} = \frac{W(A_{l_0-1})}{W(A_{l_0+1})},$$

wobei $W(A_l)$ das thermodynamische Gewicht des Zustand A_l bezeichnet.

- c) Zeigen Sie nun, dass für $N \gg r$ in guter Näherung

$$\frac{p_-}{p_+} = \exp\left(\frac{N}{r} \left|h'\left(\frac{1}{2} + \frac{l_0}{2r}\right)\right|\right).$$

Stellen Sie dazu die thermodynamischen Gewichte durch die in a) ermittelte Entropie dar. Interpretieren Sie dieses Ergebnis vor dem Hintergrund des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.