Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II (Lehramt, Nebenfach, Geophysik) Blatt 2

Sommersemester 2024

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tpII_24.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 1.05.24, 23:59** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5693591.html

6. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Auf welche Weise wird in der Quantenmechanik eine Observable durch einen hermiteschen Operator beschrieben?

b) Was besagt die Bornsche Regel?

c) Weshalb ist nach der Bornschen Regel der Erwartungswert einer Observablen A im Zustand $|\psi\rangle$ durch $\langle\psi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle$ gegeben?

7. Erwartungswerte im Stern-Gerlach-Experiment *2+4+4=10 Punkte*

Die Polarisationszustände $|x\pm\rangle$, $|y\pm\rangle$ und $|z\pm\rangle$ von Silberatomen seien wie in Aufgabe 5 (Blatt 1) definiert. Als Observablen betrachten wir die Komponenten μ_x, μ_y, μ_x des magnetischen Moments eines Silberatoms.

a) Begründen Sie kurz, weshalb die Operatoren dieser Observabeln gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_x &= \frac{\mu_0}{2}\left(|x+\rangle\langle x+| - |x-\rangle\langle x-|\right),\\ \hat{\mu}_y &= \frac{\mu_0}{2}\left(|y+\rangle\langle y+| - |y-\rangle\langle y-|\right),\\ \hat{\mu}_z &= \frac{\mu_0}{2}\left(|z+\rangle\langle z+| - |z-\rangle\langle z-|\right).\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von μ_x in den Zuständen

$$|\psi_1\rangle = |x+\rangle\,, \quad |\psi_2\rangle = |z+\rangle\ .$$

c) Nun betrachten wir einen vom Winkel ϑ abhängigen Zustand

$$|\psi(\vartheta)\rangle = \cos(\tfrac{\vartheta}{2})\,|z+\rangle + \sin(\tfrac{\vartheta}{2})\,|z-\rangle\ .$$

Zeigen Sie, dass μ_z in diesem Zustand den Erwartungswert $\frac{\mu_0}{2}\cos\vartheta$ hat und interepretieren Sie dieses Ergebnis.

8. $AB \neq BA$ *5 Punkte*

$|\varphi_1\rangle$ und $|\varphi_2\rangle$ seien orthogonale Zustände, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)$ und

$$A = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\,, \quad B = |\psi\rangle\langle\psi|\,.$$

Zeigen Sie, dass $\langle\varphi_1|\,(AB - BA)\,|\varphi_2\rangle \neq 0$ und somit $AB - BA \neq 0$.

9. Operatoren *3+3+2+2=10 Punkte*

Die orthogonalen Zuständen $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \ldots, |\varphi_N\rangle$ seien eine ONB eines Zustandraums $\mathcal{H}$. Ein Operator A auf $\mathcal{H}$ sei gegeben durch

$$A = \sum_{i=1}^{N} a_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \,, \qquad a_i \in \mathbb{C}\,.$$

a) Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von A? Ist A hermitesch?

b) Zeigen Sie, dass

$$A^2 = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \,,$$

und allgemeiner für $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \sum_{i=1}^{N} a_i^n \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \,.$$

c) Die Exponentialfunktion für Operatoren ist definiert durch

$$\exp(B) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n \,.$$

Zeigen Sie, dass für den hier betrachteten Operator A

$$\exp(A) = \sum_{i=1}^{N} e^{a_i} \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \,.$$

Was sind demnach die Eigenwerte und -vektoren von $\exp(A)$?

d) Zeigen Sie explizit, dass

$$\exp(A)\exp(-A) = \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \,.$$

10. Wiederholung: lineare, homogene DGL *5 Punkte*

Zeigen Sie, dass

$$y(t) = e^{i\omega t} y_0$$

Lösung der DGL

$$\dot{y} = i\omega y, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

zum Anfangswert $y(0) = y_0$ ist. Skizzieren Sie Real- und Imaginärteil von $y(t)$ für $y_0 = 1$ und $\omega = 1$ als Funktion der Zeit $t \in [0, 4\pi]$.