Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II (Lehramt, Nebenfach, Geophysik) Blatt 4

Sommersemester 2024

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/tpII_24.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 15.05.24, 23:59** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5693591.html

15. Zur Diskussion

0 Punkte

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Ortseigenzustand $|\varphi_x\rangle$, Zustandsvektor $|\psi\rangle$ und der *Wellenfunktion* $\psi(x)$?

b) Was ist $\langle\varphi_x|\varphi_{x'}\rangle$ und was $\langle\varphi_x|\hat{x}|\varphi_{x'}\rangle$?

16. Wellenfunktionen

1+2+4+3=10 Punkte

Ein Teilchen in einer Dimension befindet sich in einem Zustand $|\psi\rangle$ mit der Wellenfunktion

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-|x|/a} \,,$$

wobei a eine postive Konstante der Dimension *Länge* ist.

a) Skizzieren Sie die Wellenfunktion für $a = 1$.
b) Zeigen Sie, dass der Zustand $|\psi\rangle$ normiert ist.
c) Berechnen Sie die Erwartungswerte von x und x^2 im Zustand $|\psi\rangle$.
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt eine Ortsmessung einen Messwert $x > a$?

17. Skalarprodukt

1+2+3+4=10 Punkte

$|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ sind Zustände eines Teilchens in einer Dimension mit Wellenfunktionen

$$\psi_1(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2}} \,, \qquad \psi_2(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\, e^{-\frac{(x+a)^2}{4\sigma^2}} \,,$$

wobei σ und a positive Konstanten der Dimension *Länge* sind.

a) Skizzieren Sie Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten $|\psi_1(x)|^2$ und $|\psi_2(x)|^2$ für $\sigma = 1$ und $a = 1$.
b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von x in den Zuständen $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$.
c) Berechnen Sie $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$, $\langle\psi_1|\hat{x}|\psi_2\rangle$ und $\langle\psi_1|\hat{x}^2|\psi_2\rangle$.
d) Der Zustand $|\chi\rangle$ sei die Superposition

$$|\chi\rangle \;=\; \alpha(\,|\psi_1\rangle \;-\; |\psi_2\rangle)\,. \tag{1}$$

Ermitteln Sie α so, dass $|\chi\rangle$ normiert ist, skizzieren Sie die Wellenfunktion für $\sigma = 1$ und $a = 1$, und bestimmen Sie den Erwartungswert von x im Zustand $|\chi\rangle$.

18. Dynamik im Kasten

1+2+1+3=7 Punkte

Ein Teilchen im 1D-Kasten $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ besitzt Energieeigenzustände $|\psi_0\rangle$ und $|\psi_1\rangle$ zu Eigenenergien E_0 und $E_1 > E_0$. Die Wellenfunktionen sind

$$\psi_0(x) \;=\; \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\cos(x)\,, \qquad \psi_1(x) \;=\; \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\sin(2x)\,.$$

a) Skizzieren Sie die Wellenfunktionen der beiden Energieeigenzustände.

b) Zeigen Sie, dass

$$\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle \;=\; 0\,, \qquad \langle\psi_1|\hat{x}|\psi_1\rangle \;=\; 0\,, \qquad \langle\psi_0|\hat{x}|\psi_1\rangle \;=\; \frac{16}{9\pi}\,.$$

c) Zur Zeit $t = 0$ sei das Teilchen im Zustand $|\chi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle)$. Wie lautet der Zustand $|\chi(t)\rangle$ des Teilchens zur Zeit $t > 0$?

d) Bestimmen Sie mittels **b)** und **c)** den Ortserwartungswert zur Zeit t: $\langle x\rangle_{|\chi(t)\rangle}$.

Formelsammlung

(i) $\int\limits_0^\infty dx\, x^2 e^{-x} \;=\; 2$

(ii) $\int\limits_{-\infty}^\infty dx\, e^{-ax^2+bx} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{b^2/(4a)}$

(iii) $\int\limits_{-\infty}^\infty dx\, x^2 e^{-x^2} \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(iv) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dx\, x\, \cos(x)\, \sin(2x) \;=\; \frac{8}{9}$