Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II (Lehramt, Nebenfach, Geophysik) Blatt 5

Sommersemester 2024

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/tpII_24.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 29.05.24, 23:59** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5693591.html

19. Zur Diskussion *0 Punkte*

$|\varphi_x\rangle$, $|\varphi_{x'}\rangle$ und $|\chi_k\rangle$, $|\chi_{k'}\rangle$ seien Orts- und Impulseigenzustände eines Punktteilchens (in einer Dimension). Was bedeuten folgende Skalarprodukte?

$$\langle\varphi_x|\varphi_{x'}\rangle, \qquad \langle\varphi_x|\chi_{k'}\rangle, \qquad \langle\chi_k|\varphi_{x'}\rangle, \qquad \langle\chi_k|\chi_{k'}\rangle.$$

20. Translation und Impuls *5x1=5 Punkte*

a) Wie wirkt der Translationsoperator $T(a)$ auf einen Ortseigenzustand $|\varphi_x\rangle$?

b) Wie kann der Impulsoperator p durch den Translationsoperator $T(a)$ definiert werden?

c) Wie kann der Translationsoperator $T(a)$ durch den Impulsoperator dargestellt werden?

d) Wie wirkt $T(a)$ auf einen Impulseigenzustand $|\tilde{\chi}_k\rangle$?

e) Bestimmen Sie $[p, T(a)]$ und $[x, T(a)]$.

21. Translationsinvarianz *1+4=5 Punkte*

Eine Observable A eines Punktteilchens ist *translationsinvariant* genau dann wenn

$$\langle A\rangle_{|\psi\rangle} = \langle A\rangle_{T(a)|\psi\rangle}$$

für alle a und alle $|\psi\rangle$.

a) Warum ist das eine sinnvolle Definition?

b) Zeigen Sie: A ist translationsinvariant genau dann wenn $[A, p] = 0$.

22. Dynamik im Kasten II *2+3=5 Punkte*

Wir betrachten wieder das Teilchen im 1D-Kasten $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aus Aufgabe 18. Es besitzt die Energieeigenfunktionen

$$\psi_0(x) \;=\; \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\cos(x)\,, \qquad \psi_1(x) \;=\; \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\sin(2x)$$

zu Eigenenergien E_0 und $E_1 > E_0$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\langle\psi_0|\hat{p}|\psi_0\rangle \;=\; 0\,, \qquad \langle\psi_1|\hat{p}|\psi_1\rangle \;=\; 0\,, \qquad \langle\psi_0|\hat{p}|\psi_1\rangle \;=\; -\frac{8i}{3\pi}\hbar\,.$$

b) Zur Zeit $t = 0$ sei das Teilchen im Zustand $|\chi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle)$. Berechnen Sie den Impulserwartungswert zur Zeit t: $\langle p\rangle_{|\chi(t)\rangle}$.

23. Translationen in Impuls- und Ortsraum *2+3=5 Punkte*

$|\psi\rangle$ sei ein Teilchenzustand (in einer Dimension) mit Ortserwartungswert x_0 und Impulserwartungswert p_0. Die Wellenfunktion des Zustands ist $\psi(x)$. Zwei weitere Zustände seien dann gegeben durch

$$|\psi_1\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}q\hat{x}}\,|\psi\rangle\,, \qquad |\psi_2\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}\,|\psi\rangle\,.$$

a) Wie lauten die Wellenfunktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ der Zustände $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$?

b) Zeigen Sie:

$$\langle p\rangle_{|\psi_1\rangle} = p_0 + q, \qquad \langle x\rangle_{|\psi_2\rangle} = x_0 + a\,.$$

24. Impuls- und Ortswellenfunktion *5 Punkte*

Die Impulswellenfunktion eines Teilchenzustands $|\psi\rangle$ sei $\tilde{\psi}(k) = c\,\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\sigma^2}}$. Hierbei ist c eine geeignet gewählte Normierungskonstante. Wie lautet die Ortswellenfunktion $\psi(x)$ des Zustands?

Formelsammlung

(i) $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-ax^2+bx} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}}\; e^{b^2/(4a)}$$

(ii) $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx\; \cos(x)\;\cos(2x) \;=\; \frac{2}{3}$$