Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II (Lehramt, Nebenfach, Geophysik) Blatt 6

Sommersemester 2024

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/tpII_24.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 05.06.24, 23:59** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5693591.html

25. Ein Teilchen fällt die Treppe runter... *6+2+2=10 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m nähert sich aus $x = -\infty$ kommend mit Impuls $p > 0$ der fallenden Potenzialstufe

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ -W, & x > 0 \qquad (W > 0). \end{cases}$$

a) Berechnen Sie mit einem geeigneten Streuansatz die Reflexionswahrscheinlichkeit R des Teilchens als Funktion der Teilchenenergie $E = p^2/2m$. Wie verhält sich die Reflexionswahrscheinlichkeit für konstante Energie E im Grenzfall $W \to \infty$?

b) Ein Auto rollt langsam mit $0.1m/s$ auf eine $100m$ lotrecht abfallende Klippe zu. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde das Auto nicht herunterfallen, wenn das ganze Geschehen quantenmechanisch betrachtet wird? Was folgt daraus auf die Anwendbarkeit der QM auf rollende Autos?

c) Ein Strahl monoenergetischer Elektronen wird senkrecht auf eine Metalloberfläche gerichtet. Im Metall liegt das Potenzial $-W = -8eV$ vor, die Elektronen im Strahl haben die Energie $+0.1eV$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die Elektronen an der Metalloberfläche reflektiert?

26. Teilchen im Würfel *8+2=10 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m ist durch unendlich hohe Potenzialwände in einem Würfel $W = [0, L] \times [0, L] \times [0, L] \subset \mathbb{R}^3$ von Kantenlänge L eingesperrt.

a) Ermitteln Sie die Energieeigenfunktionen und Eigenenergien des Teilchens. Wie groß ist die Energiedifferenz ΔE zwischen Grundzustand und einem Zustand mit nächst höherer Energie?

b) Angenommen, das Teilchen sei eine Elektron mit Masse $m_e \approx 10^{-30}kg$. Wie groß muss dann die Kantenlänge L gewählt werden, damit $\Delta E \approx 2eV$, und damit die emittierte Strahlung bei entsprechenden Niveauübergängen im sichtbaren Bereich liegt?

Hinweis zu **a)**: Verwenden Sie den *Produktansatz*

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \psi_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)\psi_{k_3}(x_3),$$

wobei

$$\psi_k(x) = \sqrt{\tfrac{2}{L}}\,\sin(kx)$$

eine aus der Vorlesung bekannte Energieeigenfuntkion eines Teilchen im eindimensionlen Kasten $[0, L]$ ist (für geeignet gewählte Wellenzahl k).

27. Harmonischer Oszillator

5+5=10 Punkte

Der quantenmechanische harmonische Oszillator der Masse m und Frequenz ω ist durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass

$$\psi_0(x) = c e^{-\frac{x^2}{2l^2}}, \qquad \text{wobei} \quad l = \sqrt{\hbar/m\omega} \quad \text{und} \quad c = (\pi l^2)^{-1/4},$$

Energieeigenfunktion des Oszillators zur Eigenenergie $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass Orts- und Implulsunschärfe in diesem Zustand gegeben sind durch

$$\Delta x := \sqrt{\langle x^2 \rangle_{\psi_0}} = \frac{l}{\sqrt{2}}, \qquad \Delta p := \sqrt{\langle p^2 \rangle_{\psi_0}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2} l},$$

und somit

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} .$$

Formelsammlung

(i) $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{b^2/(4a)}$$

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \frac{1}{2a}$$