

---

## Theoretische Physik II (Lehramt, Nebenfach, Geophysik) Blatt 7

---

Sommersemester 2024

**Webpage:** [http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tpII\\_24.html/](http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tpII_24.html/)

**Abgabe:** bis **Mittwoch, 12.06.24, 23:59** in elektronischer Form per ILIAS unter [https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto\\_uk\\_crs\\_5693591.html](https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5693591.html)

### 28. Tunneleffekt

5 Punkte

Eine Potentialschwelle der Stärke  $U$  wird von einem Teilchen der Energie  $E = 0.9U$  mit Wahrscheinlichkeit  $p = 0.1$  durchtunnelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Teilchen bei einer verringerten Energie von  $E = 0.1U$  die Potentialschwelle durchtunneln?

### 29. Streuung am $\delta$ -Potenzial

3+5+5=13 Punkte

Untersuchen Sie die Streuung eines Teilchens der Masse  $m$  am Potenzial

$$U(x) = u\delta(x)$$

mittels des Streuansatzes

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r e^{-ikx} & : x < 0 \\ t e^{ikx} & : x \geq 0 \end{cases} .$$

Die Wellenzahl  $k$  ist durch Impuls  $p$  bzw. Energie  $E = p^2/2m$  bestimmt. Die Wellenfunktion  $\psi$  ist stetig, insbesondere in  $x = 0$ . Aufgrund des singulären Potenzials muss sich die Ableitung  $\psi'$  um  $x = 0$  allerdings unstetig verhalten und um den endlichen Betrag

$$\Delta\psi' := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)) \stackrel{!}{=} \frac{2mu}{\hbar^2} \psi(0) \quad (1)$$

springen.

- Beweisen Sie die Relation (1) durch Integration der stationären Schrödingergleichung über das Intervall  $[-\varepsilon, +\varepsilon]$  im Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- Ermitteln Sie die Koeffizienten  $r$  und  $t$  im Streuansatz anhand der Anschlussbedingungen für die Wellenfunktion bei  $x = 0$ .
- Berechnen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit  $T = |t|^2$  als Funktion der Energie  $E$ . Für welche Energie  $E_0$  ist die Transmissionswahrscheinlichkeit  $1/2$ ? Skizzieren Sie  $T$  als Funktion von  $\mathcal{E} = E/E_0$

### 30. Teilchen im $\delta$ -Potenzial

7 Punkte

Ein Teilchen der Masse  $m$  ist im eindimensionalen Potenzial  $U(x) = -u\delta(x)$  mit  $u > 0$  gebunden. Bestimmen Sie Energie  $E (< 0)$  und Energieeigenfunktion  $\psi_E(x)$  des einzigen gebundenen Zustands.

Hinweis: Die Ableitung der Eigenfunktion  $\psi_E$  weist hier wieder eine Unstetigkeit in  $x = 0$  auf, die wie in der vorherigen Aufgabe behandelt werden kann.

### 31. Verschränkte und separable Zustände

5 Punkte

$|a_1\rangle_A, |a_2\rangle_A$  und  $|b_1\rangle_B, |b_2\rangle_B$  seien orthonormale Zustände zweier Quantensysteme  $A$  und  $B$ . Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\psi_1\rangle = |a_1b_1\rangle_{AB} + |a_2b_2\rangle_{AB} + |a_1b_2\rangle_{AB}$$

des Gesamtsystems  $AB$  verschränkt, die Zustände

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= |a_1b_1\rangle_{AB} + |a_2b_2\rangle_{AB} + |a_1b_2\rangle_{AB} + |a_2b_1\rangle_{AB}, \\ |\psi_3\rangle &= |a_1b_1\rangle_{AB} + |a_2b_2\rangle_{AB} - |a_1b_2\rangle_{AB} - |a_2b_1\rangle_{AB} \end{aligned}$$

dagegen aber separabel sind (jeweils bzgl.  $A|B$ ).