
Theoretische Physik II (Lehramt, Nebenfach, Geophysik) Blatt 8

Sommersemester 2024

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tpII_24.html/

Abgabe: bis **Mittwoch, 19.06.24, 23:59** in elektronischer Form per ILIAS unter
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5693591.html

32. Fakultät und Binomialkoeffizient

3+5+2=10 Punkte

In dieser Aufgabe werden Näherungen für Fakultäten und Binomialkoeffizienten erarbeitet, die u.a. in der Statistischen Physik nützlich sind.

- a) Beweisen Sie die für $n \gg 1$ gültige Näherung

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Hinweis: Logarithmieren Sie die Gleichung und nähern Sie dann die auftretende Summe durch ein Integral.

- b) Zeigen Sie nun mittels a) folgende Näherung des Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}$$

für den Fall $l \equiv \lambda n$:

$$\binom{n}{\lambda n} \approx e^{nh(\lambda)},$$

gültig für $n, \lambda n \gg 1$. Hierbei ist die Funktion $h(x)$ für $x \in [0, 1]$ durch

$$h(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$$

gegeben. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $h(x)$.

- c) Zeigen Sie anhand der Näherung aus b)

$$\binom{n}{n/2} \approx 2^n.$$

Wie kann man diese Näherung ohne große Rechnung begründen?

33. Kombinatorik

5+3=8 Punkte

- a) Auf wieviele Arten können 20 Badegäste eines Schwimmbads auf die zur Verfügung stehenden 50 Badeliegen verteilt werden? Ist diese Zahl größer oder kleiner als die Zahl an Wassermolekülen im Schwimmbecken (50m×10m×2m)?

Hinweis: Das Molgewicht von Wasser ist 18g, ein Mol sind etwa 6.0×10^{23} Teilchen.

- b) Die 20 Badegäste sollen nun in zwei Gruppen von je 10 Personen aufgeteilt werden. Auf wieviele Arten ist diese Aufteilung möglich?

34. Binomial-Verteilung

2+2+3+5=12 Punkte

Ein binäres Zufallsexperiment ergibt das Resultat 1 mit Wahrscheinlichkeit p und das Resultat 0 mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$. Bei n -maliger Ausführung des Experiments ist die Wahrscheinlichkeit $P(l)$ dafür, dass insgesamt genau l -mal das Resultat 1 erscheint, gegeben durch

$$P(l) = \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l}.$$

- a) Begründen Sie, weshalb die Wahrscheinlichkeit $P(l)$ durch den obigen Ausdruck gegeben ist.
b) Begründen Sie ebenfalls die Identität

$$(a+b)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a^l b^{n-l}.$$

- c) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Zufallsgröße l (= Anzahl der 1-Resultate) genau pn ist, d.h.

$$\langle l \rangle := \sum_{l=0}^n l P(l) \stackrel{!}{=} pn.$$

Zeigen Sie dazu zuerst mittels **a)** und **b)** folgende Beziehung:

$$\langle l \rangle = p \left(\frac{d}{dp} (p+q)^n \right)_{q=1-p}.$$

- d) Ermitteln Sie auf ähnliche Weise nun auch

$$\langle l^2 \rangle := \sum_{l=0}^n l^2 P(l)$$

und damit die Varianz

$$\langle (l - \langle l \rangle)^2 \rangle = \langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2$$

der Zufallsgröße l .