
Theoretische Physik II (Lehramt, Nebenfach, Geophysik) Blatt 9

Sommersemester 2024

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tpII_24.html/

Abgabe: bis **Mittwoch, 26.06.24, 23:59** in elektronischer Form per ILIAS unter
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5693591.html

35. Harmonischer Oszillator bei Temperatur T 2+5+3=10 Punkte

Gegeben sei ein System von N ($\gg 1$) harmonischen Oszillatoren, jeweils der gleichen Frequenz ω . Im quantenmechanischen Zustand $|n\rangle = |n_1 n_2 \dots n_N\rangle$ des Gesamtsystems befindet sich der l -te Oszillator im n_l -ten angeregten Zustand der Energie $E_l = \hbar\omega(n_l + \frac{1}{2})$, $n_l = 0, 1, 2, \dots$. Die Gesamtenergie der N Oszillatoren im Zustand $|n\rangle$ ist demnach

$$E(n) = \hbar\omega \sum_{l=1}^N n_l + \frac{\hbar\omega N}{2}.$$

Den konstanten Energiebeitrag $\hbar\omega N/2$ eliminieren wir durch eine Verschiebung des Energienullpunkts und setzen somit

$$E(n) = \hbar\omega \sum_{l=1}^N n_l.$$

In den folgenden Aufgabenteilen ermitteln Sie zuerst die mikrokanonische Zustandssumme $Z(E)$, daraus Entropie $S(E)$ und Temperatur $T(E)$ des Systems, und damit schließlich die *mittlere Besetzungszahl* $\bar{n} = E/N\hbar\omega$ eines quantenmechanischen Oszillators der Frequenz ω bei Temperatur T .

a) Zeigen Sie, dass für $E = Q\hbar\omega$ ($Q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$Z(E) = \binom{Q+N-1}{N-1}.$$

Hinweis: K ununterscheidbare Kugeln lassen sich auf genau $\binom{K+N-1}{N-1}$ verschieden Arten auf N Behälter verteilen (warum?).

b) Ermitteln Sie nun Entropie $S(E)$ und Temperatur $T(E)$ des Systems. Verwenden Sie dabei die Näherung $n! \approx (n/e)^n$ und vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $1/N$.

Zur Kontrolle: $\frac{1}{K} S(E) = Q \ln(1 + \frac{N}{Q}) + N \ln(1 + \frac{Q}{N})$, wobei $Q \equiv Q(E) = E/\hbar\omega$.

c) Zeigen Sie schließlich, dass

$$\bar{n} \equiv \frac{E}{N\hbar\omega} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1}.$$

Bestimmen Sie daraus geeignete Näherungen der mittleren Besetzungszahl $\bar{n}$ für hohe Temperaturen $KT \gg \hbar\omega$ und tiefe Temperaturen $KT \ll \hbar\omega$.

36. Ultrarelativistisches Gas

10 Punkte

Bewegen sich die Teilchen eines Gases mit nahezu Lichtgeschwindigkeit c , muss ihre Energie relativistisch gemäß der Energie-Impuls-Beziehung $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2}$ bestimmt werden. Im Falle sehr hochenergetischer Gasteilchen mit $E \gg m_0 c^2$ spricht man von einem *ultrarelativistischen Gas*. Hier kann die Ruhemasse m_0 vernachlässigt werden und die Energie eines Teilchens mit Impuls $\vec{p}$ ist in guter Näherung $E = c|\vec{p}|$. Zeigen Sie, dass für ein solches Gas die mittlere Teilchenenergie gegeben ist durch

$$\frac{E}{N} = 3KT.$$