# Lösungshinweise Blatt 2

7a) $\mu_x$: mögliche Messwerte sind $\pm\mu_0/2$, mit

Wkt. 1 gemessen im Zust. $|x\pm\rangle$

$$\to \hat{\mu}_x = +\frac{\mu_0}{2}|x+\rangle\langle x+| - \frac{\mu_0}{2}|x-\rangle\langle x-|$$

$\mu_y, \mu_z$ analog.

7b) $$\langle\psi_1|\hat{\mu}_x|\psi_1\rangle = \frac{\mu_0}{2}\Big(\underbrace{\langle x-|x+\rangle\langle x+|x-\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle x-|x-\rangle\langle x-|x-\rangle}_{=1}\Big)$$

$$= -\mu_0/2 \quad ;$$

$$|x\pm\rangle = (|z+\rangle \pm |z-\rangle)/\sqrt{2} \to |z\pm\rangle = (|x+\rangle \pm |x-\rangle)/\sqrt{2} \qquad (*)$$

$$\to |y-\rangle = (|z+\rangle - i|z-\rangle)/\sqrt{2} = \frac{1}{2}\big(|x+\rangle + |x-\rangle - i(|x+\rangle - |x-\rangle)\big)$$

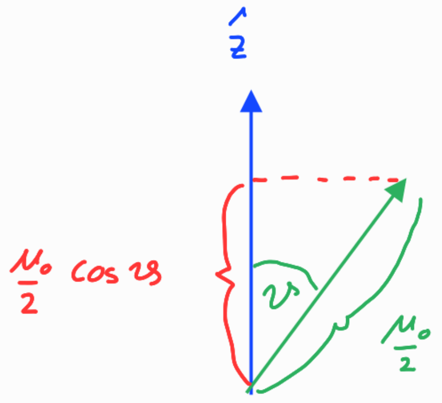
$$= \frac{1-i}{\sqrt{2}}\big(|x+\rangle + i|x-\rangle\big)/\sqrt{2} \qquad (**)$$

$$\to \langle\psi_2|\hat{\mu}_x|\psi_2\rangle \overset{(**)}{=} \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{2}\Big(\underbrace{\langle x+|x+\rangle\langle x+|x+\rangle}_{=1} - \underbrace{\langle x-|x-\rangle\langle x-|x-\rangle}_{=1}\Big) = 0$$

$$\langle\psi_3|\hat{\mu}_x|\psi_3\rangle \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{2}\big(\langle x+|x+\rangle\langle x+|x+\rangle - \langle x-|x-\rangle\langle x-|x-\rangle\big) = 0$$

7c) $$|\psi(\vartheta)\rangle = \cos\vartheta/2\,|z+\rangle + \sin\vartheta/2\,|z-\rangle$$

$$\to \langle\hat{\mu}_z\rangle_{|\psi(\vartheta)\rangle} = \frac{\mu_0}{2}\left(\cos^2\vartheta/2 - \sin^2\vartheta/2\right) = \frac{\mu_0}{2}\cos\vartheta$$




$\rightsquigarrow \; |\psi(\vartheta)\rangle \;\hat{=}\;$ Zustand $|z+\rangle$ um Winkel $\vartheta$ gedreht

8) $\quad A\,|\varphi_2\rangle = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = 0$

$$\rightsquigarrow \langle\varphi_1|\,AB - BA\,|\varphi_2\rangle = \langle\varphi_1|\,AB\,|\varphi_2\rangle = \langle\varphi_1|B|\varphi_2\rangle$$

$$= \underbrace{\langle\varphi_1|\psi\rangle}_{=1/\sqrt{2}}\underbrace{\langle\psi|\varphi_2\rangle}_{=1/\sqrt{2}} = 1/2 \neq 0 .$$

9a) $\quad a_i$ ist EW. zum EV. $|\varphi_i\rangle$ ;

$$A^+ = \sum_i a_i^* \,|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| , \quad \text{d.h. } A = A^+$$

g.d.w. $\; a_i \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ $A$ hermitesch g.d.w. alle EWe $a_i$ reell

9b)

$$A^2 = \left(\sum_i a_i\,|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\right)\left(\sum_j a_j\,|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|\right)$$

$$= \sum_{i,j} a_i a_j\,|\varphi_i\rangle\underbrace{\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle}_{=\delta_{ij}}\langle\varphi_j|$$

$$= \sum_i a_i^2\,|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \quad ;$$

per Induktion:

$$A^n = A A^{n-1} = \left(\sum_i a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\right)\left(\sum_j a_i^{n-1} |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|\right)$$

$$= \sum_{ij} a_i a_j^{n-1} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle\langle\varphi_i|$$

$$= \sum_i a_i^n |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \quad .$$

9c) $$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \overset{b)}{=} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_i^n}_{= e^{a_i}} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

$$= \sum_i e^{a_i} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

$\rightarrow$ $e^{a_i}$ ist EW zum EV $|\varphi_i\rangle$ von $\exp A$

9d) $$\exp(A)\exp(-A) = \sum_i e^{a_i} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \sum_j e^{-a_j} |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$$

$$= \sum_{ij} e^{a_i - a_j} |\varphi_i\rangle\underbrace{\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle}_{=\delta_{ij}}\langle\varphi_j| =$$

$$= \sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \quad .$$

10) $$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{i\omega t} y_0\right) = i\omega e^{i\omega t} = i\omega y(t) \quad \checkmark$$

$$y(0) = e^0 y_0 = y_0 \quad \checkmark$$

$$Y(t) = e^{i\omega t} Y_0 = (\cos\omega t + i \sin\omega t) Y_0$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\, Y(t) = \cos(\omega t)\, Y_0 \, , \quad \mathrm{Im}\, Y(t) = \sin(\omega t)\, Y_0$$