Lösungshinweise Blatt 5

20 a) $\quad T_a |\varphi_x\rangle = |\varphi_{x+a}\rangle$

b) $\quad \hat{p} = i\hbar \frac{d}{ds} T(s) \Big|_{s=0}$

c) $\quad T(a) = e^{-\frac{i}{\hbar} a \hat{p}}$

d) $\quad T(a)|\chi_k\rangle \overset{c)}{=} e^{-\frac{i}{\hbar} a \hat{p}} |\chi_k\rangle = e^{-iak} |\chi_k\rangle$

$\hat{p}|\chi_k\rangle = \hbar k |\chi_k\rangle$

e) $\quad \bullet\ [p, T(a)] \overset{c)}{=} [p, e^{-iap/\hbar}] = 0$

$\bullet\ [x, T(a)]|\varphi_{x_0}\rangle = (\hat{x}T(a) - T(a)\hat{x})|\varphi_{x_0}\rangle$

$= \hat{x}|\varphi_{x_0+a}\rangle - T(a) x_0 |\varphi_{x_0}\rangle$

$= (x_0 + a - x_0)|\varphi_{x_0+a}\rangle = a\, T(a)|\varphi_{x_0}\rangle$

d.h. $\quad [x, T(a)] = a\, T(a)$

21 a) Der Erwartungswert einer translations-invarianten Observable sollte sich unter Translation des Zustand $|\psi\rangle \to T(a)|\psi\rangle$ nicht ändern; das ist genau der Fall wenn $\langle A\rangle_{|\psi\rangle} = \langle A\rangle_{T(a)|\psi\rangle}$ für alle a, $|\psi\rangle$.

b) offenbar ist

$$\langle A\rangle_{|\psi\rangle} = \langle A\rangle_{T(a)|\psi\rangle} \quad \text{für alle } a, |\psi\rangle$$

äquivalent zu

$$0 = \frac{d}{ds} \langle A\rangle_{T(s)|\psi\rangle} \Big|_{s=0} \quad \text{für alle } |\psi\rangle$$

nun gilt:

$$\frac{d}{ds} \langle A\rangle_{T(s)\psi}\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \langle T(s)\psi, A\, T(s)\psi\rangle\Big|_{s=0}$$

$$= \langle \underbrace{\frac{d}{ds} T(s)\Big|_{s=0}}_{= -\frac{i}{\hbar} p} \psi, A\psi\rangle + \langle \psi, A \underbrace{\frac{d}{ds} T(s)\Big|_{s=0}}_{= -\frac{i}{\hbar} p} \psi\rangle$$

- Produktregel
- $T(0) = \mathbb{1}$

$$= \frac{i}{\hbar} \langle \psi, (pA - Ap)\psi\rangle = \langle \frac{i}{\hbar}[p, A]\rangle_\psi$$

$p = p^\dagger$

$\rightarrow$ A translationsinvariant

$$\Leftrightarrow \quad \langle \frac{i}{\hbar}[p, A]\rangle_\psi = 0 \quad \text{für alle } \psi$$

$$\Leftrightarrow \quad [p, A] = 0$$

22a) $$\langle p \rangle_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \, \cos x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \cos x$$

$$= \frac{2i}{\pi}\hbar \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \, \underbrace{\cos x \, \sin x}_{\text{ungerade Fkt.}} = 0$$

$$\langle p \rangle_{\psi_1} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \, \sin(2x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \sin(2x)$$

$$= -\frac{4i}{\pi}\hbar \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \, \underbrace{\sin(2x)\cos(2x)}_{\text{ungerade Fkt.}} = 0$$

$$\langle \psi_0 | \hat{p} | \psi_1 \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \, \cos x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \sin(2x)$$

$$= -\frac{4i}{\pi}\hbar \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \, \cos x \cdot \cos(2x)}_{\overset{(ii)}{=} 2/3} = -\frac{8i}{3\pi}\hbar$$

b) $$\langle p \rangle_{\chi(t)} = \frac{1}{2} \underbrace{\langle p \rangle_{\psi_0}}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\langle p \rangle_{\psi_1}}_{=0}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{i\omega t} \underbrace{\langle \psi_1 | p | \psi_0 \rangle}_{= +\frac{8i}{3\pi}\hbar} + \frac{1}{2} e^{-i\omega t} \overbrace{\langle \psi_0 | p | \psi_1 \rangle}^{= -\frac{8i}{3\pi}\hbar}$$

$$\boxed{\omega = (E_1 - E_0)/\hbar}$$

$$= \frac{4i}{3\pi}\hbar \Big(\underbrace{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}_{= 2i \sin \omega t} \Big) = -\frac{8\hbar}{3\pi} \sin \omega t$$

23)
$$\psi_1(x) = \langle \varphi_x, \psi_1 \rangle = \langle \varphi_x, e^{iq\hat{x}/\hbar} \psi_1 \rangle$$

$$\underset{\hat{x}=\hat{x}^+}{\overset{!}{=}} \langle e^{-iq\hat{x}/\hbar} \varphi_x, \psi_1 \rangle = e^{iqx/\hbar} \langle \varphi_x, \psi \rangle$$

$$= e^{iqx/\hbar} \psi(x) \; ;$$

⌜ kürzer: $\underline{e^{iq\hat{x}/\hbar}}$ im Ortsdarstellung: $\underline{e^{iqx/\hbar}}$

$$\rightarrow \quad \psi_1(x) = e^{iqx/\hbar} \psi(x)$$ ⌟

$$\underline{\psi_2(x)} = \langle \varphi_x, e^{-ia\hat{p}/\hbar} \psi \rangle$$

$$\underset{\hat{p}=\hat{p}^+}{\overset{!}{=}} \langle \underbrace{e^{+ia\hat{p}/\hbar}}_{= T(-a)} \varphi_x, \psi \rangle$$

$$= \langle \varphi_{x-a}, \psi \rangle = \underline{\psi_2(x-a)}$$

b)
$$\langle p \rangle_{\psi_1} = \int dx \; e^{-iqx/\hbar} \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) e^{iqx/\hbar} \psi(x)$$

$$= \underbrace{\int dx \; \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)}_{= \langle p \rangle_\psi = p_0} + \underbrace{\int dx \; \psi^*(x) \, q \, \psi(x)}_{= |\psi|^2 q = q}$$

$$\langle x \rangle_{\psi_2} = \int dx\, \psi^*(x-a)\, x\, \psi(x+a)$$

$$\underset{y = x+a}{=} \int dy\, \psi^*(y)\,(y+a)\,\psi(y) = x_0 + a$$

2a)

$$\psi(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{\psi}(k)\, e^{+ikx}$$

$$= \frac{c}{2\pi} \int dk\, e^{-\frac{k^2}{4\sigma^2} + ikx}$$

$$\underset{(\ddot{u})}{=} \frac{c}{\sqrt{\pi}} \cdot 2\sigma\, e^{-\sigma^2 x^2}$$

d.h. $\psi(x)$ Gaußfunktion der Varianz $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sigma}$.