

Lösungshinweise Blatt 6

25a) Streuansatz:
$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r e^{-ikx} & : x < 0 \\ t e^{ikx} & : x \geq 0 \end{cases}$$

mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\tilde{k} = \sqrt{2m(E+W)}/\hbar$.

Stetigkeit von ψ und ψ' in $x=0$ erfordert

(i) $1 + r = t$

(ii) $k - rk = t \tilde{k} = \tilde{k} + r \tilde{k}$

$$\Rightarrow r = \frac{k - \tilde{k}}{k + \tilde{k}} \Rightarrow R = |r|^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E+W}}{\sqrt{E} + \sqrt{E+W}} \right)^2$$

also $R(E) = \left(\frac{1 - \sqrt{1+W/E}}{1 + \sqrt{1+W/E}} \right)^2 \xrightarrow{\frac{W}{E} \rightarrow \infty} 1 !$

b) $\frac{W}{E} = \frac{mgh}{\frac{m}{2}v^2} = \frac{2gh}{v^2} = 2 \cdot 10^5 \gg 1$

$\Rightarrow R \simeq 1 !$ quantenmechanisch gesehen

sollte also nicht herabstürzen !??

$\rightarrow$ QM liefert keine gute Beschreibung für das fallende Kato! (warum eigentlich nicht??)

1) hier $\frac{W}{E} = 80$, $\xrightarrow{a)} R = \left(\frac{1 - \sqrt{81}}{1 + \sqrt{81}} \right)^2 = \frac{64}{100} = 0.64 = \underline{\underline{2}}$

26) Wegen $\frac{\partial^2}{\partial x_e^2} \psi_{\vec{h}}(\vec{x}) = -h_e^2 \psi_{\vec{h}}(\vec{x})$ ist

$$-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} \psi_{\vec{h}}(\vec{x}) = \frac{\hbar^2 |\vec{h}|^2}{2m} \psi_{\vec{h}}(\vec{x}) ;$$

d. h. $\psi_{\vec{h}}(\vec{x})$ ist Energieeigenfkt. zur Energie

$$E_{\vec{h}} = \frac{\hbar^2 |\vec{h}|^2}{2m}, \text{ sofern } \psi_{\vec{h}}(\vec{x}) \text{ auf dem Rand}$$

von W verschwindet; dies ist der Fall

wenn $h_e = \frac{\pi}{L} \cdot n_e, \quad n_e = 1, 2, 3, \dots$
 $\quad \quad \quad e = 1, 2, 3$

$$\rightarrow \vec{h} = \frac{\pi}{L} \vec{n} \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_+^3$$

$\rightarrow$ Energieeigenfunktionen

$$\vec{\psi}_{\vec{n}}(\vec{x}) = \left(\frac{2}{L} \right)^{3/2} \sin\left(\frac{\pi n_1}{L} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi n_2}{L} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi n_3}{L} x_3\right)$$

zu Eigenenergien $E_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2 |\vec{h}_{\vec{n}}|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} |\vec{n}|^2$

Grundzustand: $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : E_0 = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2 \pi^2}{m L^2}$

angeregte Zustände mit nächst höherer Energie:

$$\vec{u}_x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \rightarrow^2$$

$$\rightarrow |\vec{u}_x|^2 = |\vec{u}_y|^2 = |\vec{u}_z|^2 = 6$$

$$\rightarrow E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} |\vec{u}_x|^2 = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{mL^2} = 2E_0$$

$$\Delta E = E_1 - E_0 = E_0 = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} = \frac{3}{8} \frac{h^2}{mL^2}$$

b)

$$L = \left(\frac{3}{8} \frac{h^2}{m \Delta E} \right)^{1/2} \approx 10^{-9} \text{ m} = \underline{10 \text{ \AA}}$$

$m = 10^{-30} \text{ kg}$
 $\Delta E = 2 \text{ eV} = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
 $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

$$27a) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \underline{\psi_0(x)}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} \left(-\ell^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{\ell^2} x^2 \right) \propto e^{-x^2/2\ell^2}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} \left(\underline{-\ell^2} \left(\underline{-\frac{e^{-x^2/2\ell^2}}{\ell^2}} + \underline{\frac{x^2}{\ell^4} e^{-x^2/2\ell^2}} \right) + \underline{\frac{x^2}{\ell^2} e^{-x^2/2\ell^2}} \right)$$

$$= \underline{\frac{\hbar\omega}{2} \psi_0(x)} \quad \checkmark$$

0)

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}l^2} \int dx x^2 e^{-x^2/l^2} = \frac{l^2}{2}$$

(ii)

$$\langle p^2 \rangle = \int dx \psi_0(x) \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi_0(x)$$

$$\begin{aligned} \text{P.I.} &= \hbar^2 \int dx \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \psi_0(x)}_{-\frac{x}{l^2} \psi_0(x)} \right)^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{l^4} \cdot \underbrace{\int dx x^2 \psi_0^2(x)}_{= \langle x^2 \rangle = \frac{l^2}{2}} = \frac{\hbar^2}{2l^2} \end{aligned}$$

also $\Delta x = l/\sqrt{2}$, $\Delta p = \frac{\hbar}{\sqrt{2}l}$ ✓