

Lösungshinweise Blatt 8

$$32a) \quad \ln n! = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)$$

$$= \sum_{l=1}^n \ln l \approx \int_1^n \ln x \, dx = x \ln x - x \Big|_1^n$$

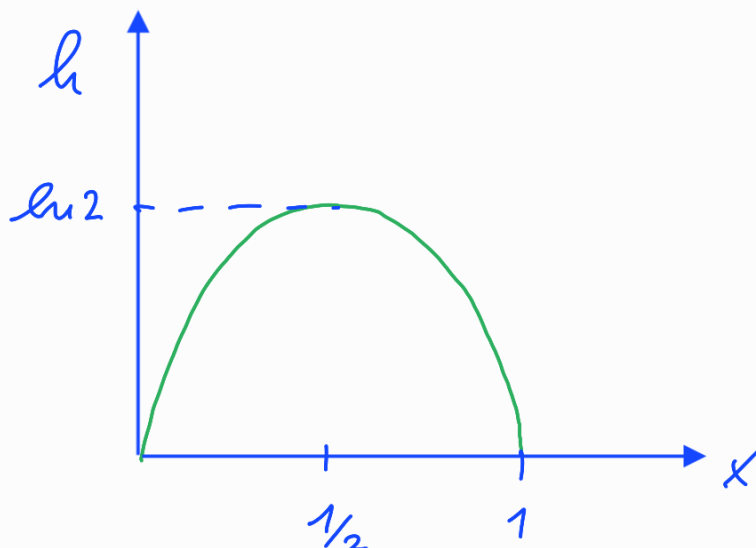
$$= n \ln n - n + 1 = n \left(\ln\left(\frac{n}{e}\right) + \frac{1}{n} \right)$$

$$\approx \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) \rightarrow n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

$$b) \quad \binom{n}{\lambda n} \stackrel{a)}{\approx} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{\lambda n}{e}\right)^{\lambda n} \left(\frac{(1-\lambda)n}{e}\right)^{(1-\lambda)n}}$$

$$= \left(\lambda^{-\lambda} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)} \right)^n$$

$$= \exp\left(n \left(\underbrace{-\lambda \ln \lambda - (1-\lambda) \ln(1-\lambda)}_{= h(\lambda)} \right) \right)$$



c) mit $\ln(1/2) = -\ln 2$ folgt mit b)

$$\binom{n}{n/2} \simeq e^{n \ln 2} = 2^n \quad (\text{für } n \gg 1)$$

einfaches Argument: eine typische Binärzahl mit n Bits weist ebensoviele Nullen wie Einsen auf: $n/2$;

diese $\binom{n}{n/2}$ vielen typischen Binärzahlen bilden den mit Abstand größten Teil aller 2^n n -stelligen Binärzahlen

$$\rightarrow \binom{n}{n/2} \simeq 2^n$$

33 a)

$$N = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdots 32 \cdot 31 = \frac{50!}{30!} = 1,1 \cdot 10^{32}$$

$$N_{H_2O} = 50 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{18} \cdot 6 \cdot 10^{23} = \frac{1}{3} 10^{32}$$

$$\text{d.h. } N > N_{H_2O}$$

$$b) N = \binom{20}{10} = \frac{20!}{(10!)^2} = 184756$$

34a) Es gibt $\binom{n}{l}$ verschiedene Möglichkeiten
in n Ausführungen des Zufallsexperiments
genau l -mal Resultat 1 zu erhalten;
jede einzelne dieser $\binom{n}{l}$ Möglichkeiten
erscheint mit Wkt. $p^l (1-p)^{n-l}$

$$\rightarrow P(l) = \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l}$$

$$\begin{aligned} b) (a+b)^n &= (a+b)(a+b) \dots (a+b) \\ &= b b b \dots b \\ &+ a b b \dots b + b a b \dots b + \dots + b \dots b a \\ &+ a a b \dots b + a b a b \dots b + \dots \\ &+ a a a b \dots b + \dots \\ &\vdots \\ &+ a a \dots a b + a a \dots a b a + \dots \\ &+ a a \dots a \end{aligned}$$

Term : Anzahl

$$a^0 b^n : \binom{n}{0}$$

$$a^1 b^{n-1} : \binom{n}{1}$$

$$a^2 b^{n-2} : \binom{n}{2}$$

$$a^3 b^{n-3} : \binom{n}{3}$$

$\vdots$

$$a^{n-1} b : \binom{n}{n-1}$$

$$a^n b^0 : \binom{n}{n}$$

+

$$\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a^l b^{n-l}$$

34c)

$$\begin{aligned}
 p \frac{d}{dp} (p+q)^n \Big|_{q=1-p} &= p \frac{d}{dp} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} p^{\ell} q^{n-\ell} \Big|_{q=1-p} \\
 &\quad \xrightarrow{\quad \quad \quad} \ell p^{\ell-1} \\
 &= \sum_{\ell=0}^n \ell \binom{n}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-\ell} = \langle \ell \rangle \quad \checkmark \\
 &\quad \underbrace{\ell \binom{n}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-\ell}}_{p(\ell)}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \langle \ell \rangle = p \frac{d}{dp} (p+q)^n \Big|_{q=1-p} = pn$$

alternativ:

$$\begin{aligned}
 \langle \ell \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i \rangle = pn \\
 &\quad \uparrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 &\quad \text{Ergebnis i-tes Z.E.} \quad \quad \quad \langle x_i \rangle = p
 \end{aligned}$$

$$d) \quad \langle \ell^2 \rangle = \sum_{\ell=0}^n \ell^2 p(\ell) = \sum_{\ell=0}^n \ell^2 \binom{n}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-\ell}$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{!}{=} p \frac{d}{dp} p \frac{d}{dp} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} p^{\ell} q^{n-\ell} \Big|_{q=1-p}
 \end{aligned}$$

analog c)

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{b)}{=} p \frac{d}{dp} p \frac{d}{dp} (p+q)^n \Big|_{q=1-p} =
 \end{aligned}$$

$$= p \frac{d}{dp} p u (p+q)^{u-1} \Big|_{q=1-p}$$

$$= p u + p^2 u (u-1) = u(p-p^2) + p^u u^2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sigma^2 &= \langle (l - \langle l \rangle)^2 \rangle = \langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2 \\ &= u p (1-p) \end{aligned}$$

a. h. $\sigma \propto \sqrt{u}$!

