Lösungshinweise Blatt 9

35 a) Gesamtenergie E, aufgeteilt auf $Q = E/\Delta E$ "Energiequanten" von jeweils $\Delta E = \hbar\omega$, lässt sich auf $\binom{Q+N-1}{N-1}$ verschiedenen Arten auf N Oszillatoren verteilen

$\rightarrow$ es gibt $\binom{Q+N-1}{N-1}$ verschiedene Zustände $|n\rangle$ zur Energie $E = \hbar\omega Q$ $\rightarrow Z(E) = \binom{Q+N-1}{N-1}$.

b) mit $N-1 = N(1-\cancel{1/N}) \simeq N$ und $n! \simeq (n/e)^n$

ist $\ln Z(E) = \ln \binom{Q+N}{N} = \ln \dfrac{(Q+N)^{Q+N}}{N^N Q^Q}$

$$= (Q+N)\ln(Q+N) - N\ln N - Q\ln Q$$

$$= Q\ln(1+N/Q) + N\ln(1+Q/N) \equiv S(E)/k \qquad (*)$$

$$\rightarrow \frac{\hbar\omega}{kT} = \frac{\hbar\omega}{k}\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\hbar\omega}{k}\frac{\partial S}{\partial Q}\cdot\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial E}}_{=1/\hbar\omega} = \frac{1}{k}\frac{\partial S}{\partial Q}$$

$$\overset{(*)}{=} \ln\left(1+\frac{N}{Q}\right) - \frac{N}{Q^2}\frac{Q}{1+N/Q} + \frac{1}{N}\frac{N}{1+Q/N} = \ln\left(1+\frac{N}{Q}\right)$$

also $$\frac{\hbar\omega}{kT} = \ln\left(1 + \frac{N\hbar\omega}{E}\right) .$$

$\to$ c) $$\bar{n} \equiv \frac{E}{N\hbar\omega} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Näherungen:

$kT \gg \hbar\omega$: $\to$ $\hbar\omega/kT \ll 1$

$$\to \quad e^{\hbar\omega/kT} \simeq 1 + \hbar\omega/kT$$

$$\to \quad \bar{n} \simeq \frac{kT}{\hbar\omega}$$ $\hat{=}$ thermische Energie kT

eines Oszillators aufgeteilt auf $\bar{n} = kT/\Delta E$

Energiequanten der Energie $\Delta E = \hbar\omega$

$kT \ll \hbar\omega$: $\to$ $e^{\hbar\omega/kT} \gg 1$

$$\to \quad \bar{n} = e^{-\hbar\omega/kT} .$$

36) Vorgehensweise wie beim nicht-rela-

tivistischen idealen Gas in Vorlsg. 20,

hier mit $H = c \sum_{i=1}^{N} |\vec{p}_i|$:

$$\rightarrow \quad Z(E) = V^N \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p}_N}_{\underbrace{E-\Delta E \le c \sum_i |\vec{p}_i| \le E}}$$

$$\Updownarrow$$

$$1 - \underbrace{\frac{\Delta E}{E}}_{=:\gamma} \le \sum_i \left| \frac{c}{E} \vec{p}_i \right| \le 1$$

$$= V^N (E/c)^{3N} \cdot \underbrace{\int d^3\vec{u}_1 \cdots \int d^3\vec{u}_N}_{1-\gamma \le \sum_i |\vec{u}_i| \le 1}$$

Subst.: $\vec{p}_i = \frac{E}{c} \vec{u}_i$

unabhängig von E!

$$\rightarrow \quad Z(E) = \alpha\, V^N E^{3N}, \qquad \alpha = \text{konst.}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{kT} = \frac{\partial}{\partial E} \ln Z(E) = \frac{3N}{E}$$

d.h. $\frac{E}{N} = 3kT$ ✓