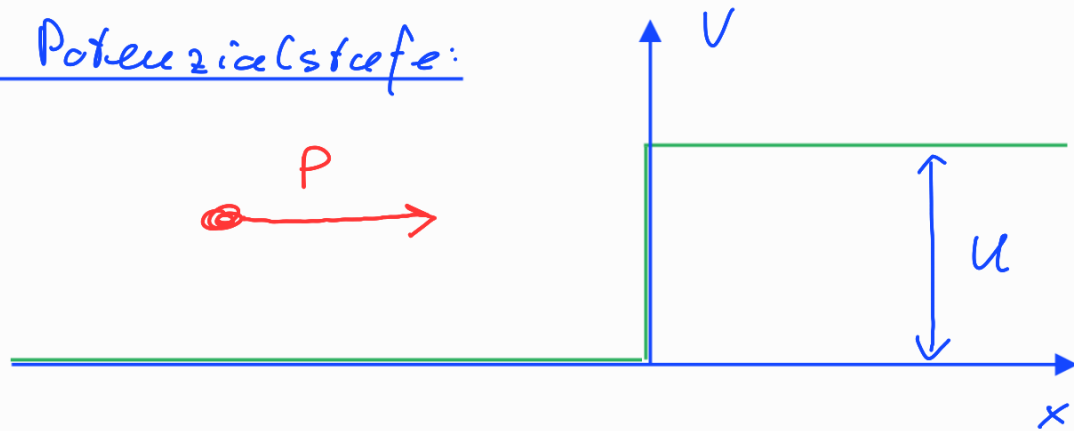


Wiederholung

Streuung an Potenzialstufe:



Streuungsausatz:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{i\hbar x} + r e^{-i\hbar x} & : x < 0 \\ t e^{i\tilde{\hbar} x} & : x > 0 \end{cases}$$

• Stetig. S.C. : $\hbar = \sqrt{2mE}/\hbar$ $E = p^2/2m$

$$\tilde{\hbar} = \sqrt{2m(E-U)}/\hbar$$

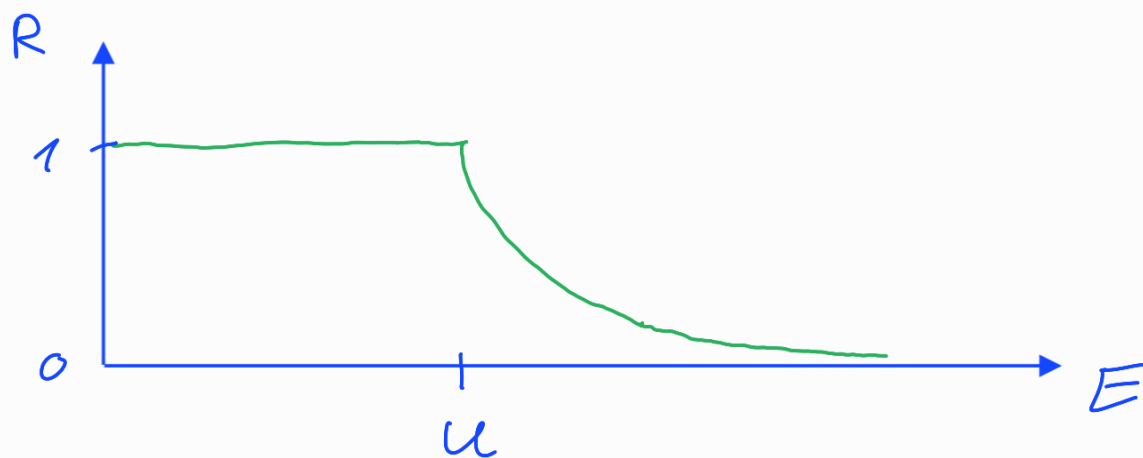
• Stetigkeit von ψ und ψ' in $x=0$:

$$\left. \begin{aligned} & 1 + r = t \\ & \hbar - r\hbar = t\tilde{\hbar} \end{aligned} \right\} \rightarrow r = \frac{\hbar - \tilde{\hbar}}{\hbar + \tilde{\hbar}}$$

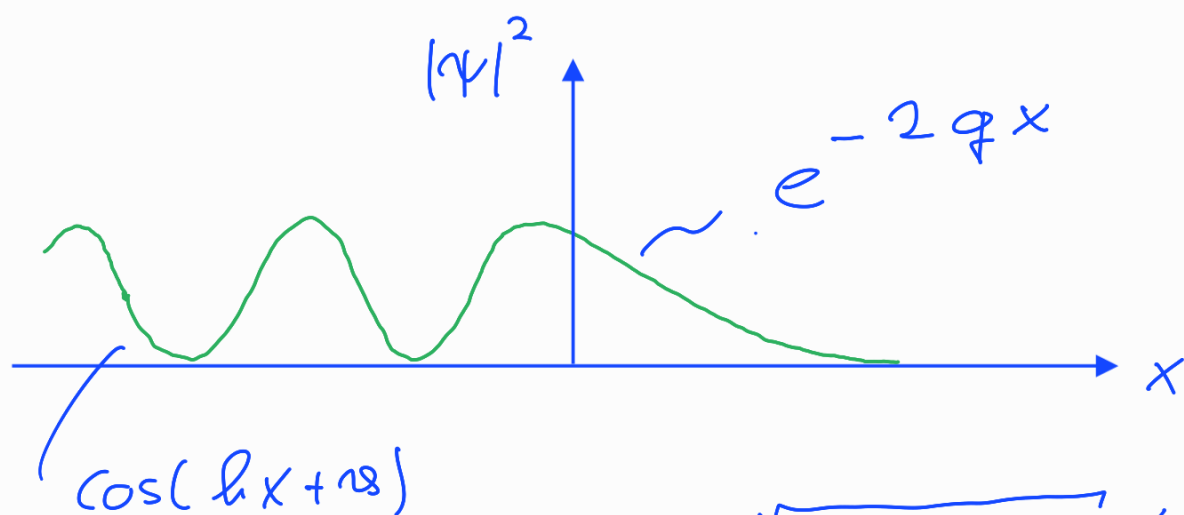
→ Reflexionswkt.:

$$R = |r|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{1-U/E}}{1 + \sqrt{1-U/E}} \right|^2 = \begin{cases} 1 & : E < U \\ 1 - 4\sqrt{\frac{E-U}{U}} & : 0 < E-U < U \\ U^2/4E^2 & : E > U \end{cases}$$

(?)



Wellenfunktion für $E < U$: $\rightarrow \tilde{\hbar} = i\eta$ imaginär!



$$\eta = \sqrt{2m(U-E)}/\hbar$$

exponentieller Abfall von $|\psi(x)|^2$ im

klassisch verbotenen Bereich ($E < U$):

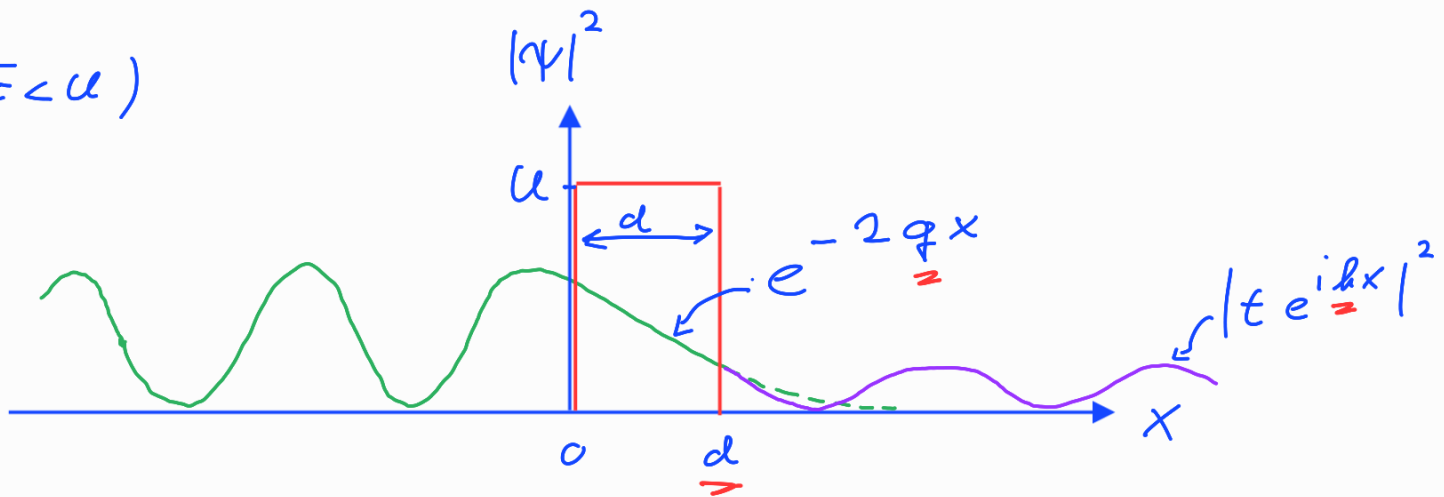
$$|\psi(x)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-x/\lambda} \quad (x > 0)$$

g.m. Eindringtiefe: $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U-E)}}$

$m = m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $U-E = 1 \text{ eV} \rightarrow \lambda \approx 1 \text{ \AA}$

→ Tunneln durch Potenzialschleife

$(E < U)$



$$q = \sqrt{2m(U-E)}/\hbar$$

2→ Tunnelwahrscheinlichkeit

$$T = |\psi(d)|^2 \simeq e^{-d/\lambda} = e^{-\frac{1}{\hbar} \sqrt{8m(U-E)} \cdot d}$$

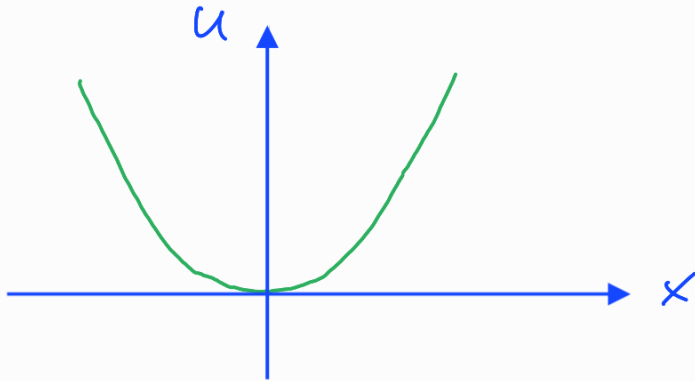
→ Reflexivität:

$$R = 1 - T = 1 - e^{-\frac{1}{\hbar} \sqrt{8m(U-E)} d}$$

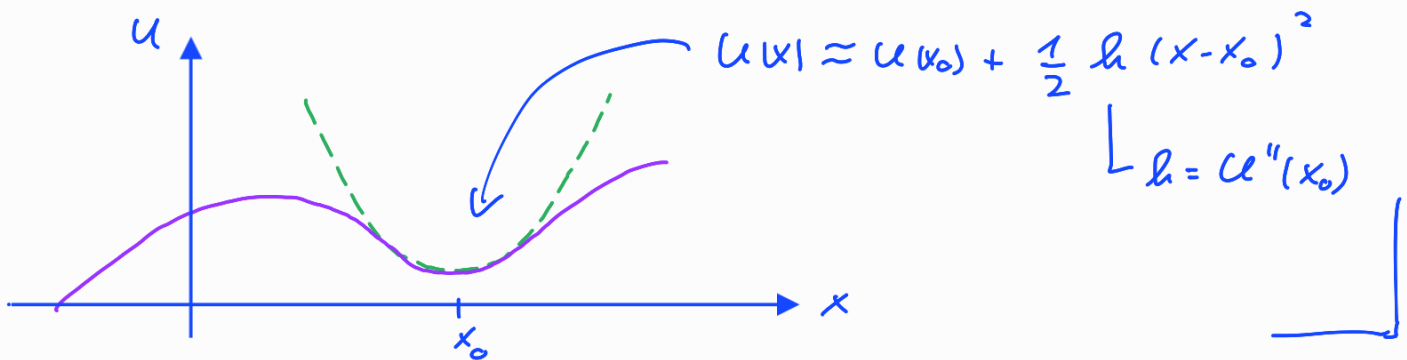


Quantenmechanische harmonische Oszillator

Teilchen im Pot. $U(x) = \frac{1}{2} k x^2$



└ gute Näherung für Schwingung um
stabile Gleichgewichtslage:



Klassisch: harmonische Schwingung
mit Frequenz $\omega = \sqrt{k/m}$,
unabhängig von Auslenkung

QM?



Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 \hat{x}^2$$

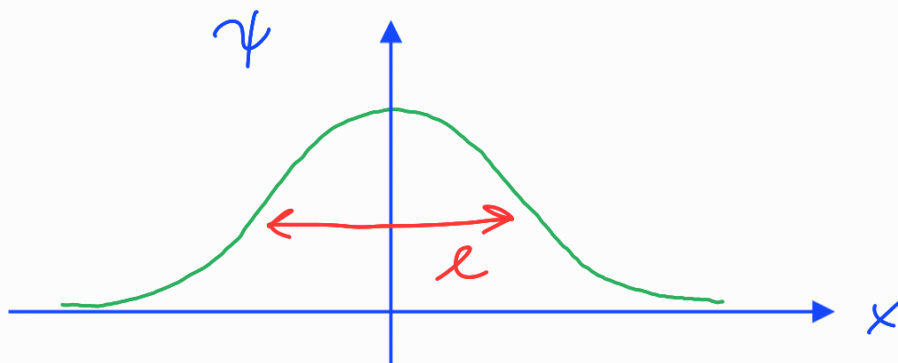
1D q.m. Oszillator

Übungsaufg. 27, Blatt 6:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(\pi l^2)^{1/4}} e^{-x^2/2l^2}, \quad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

ist Energieeigenfunktion zur Eigenenergie:

$$E_0 = \frac{\hbar \omega}{2}$$



$\psi_0(x)$ tatsächlich Grundzustand,

$\rightarrow E_0 = \frac{\hbar \omega}{2}$ Grundzustandsenergie

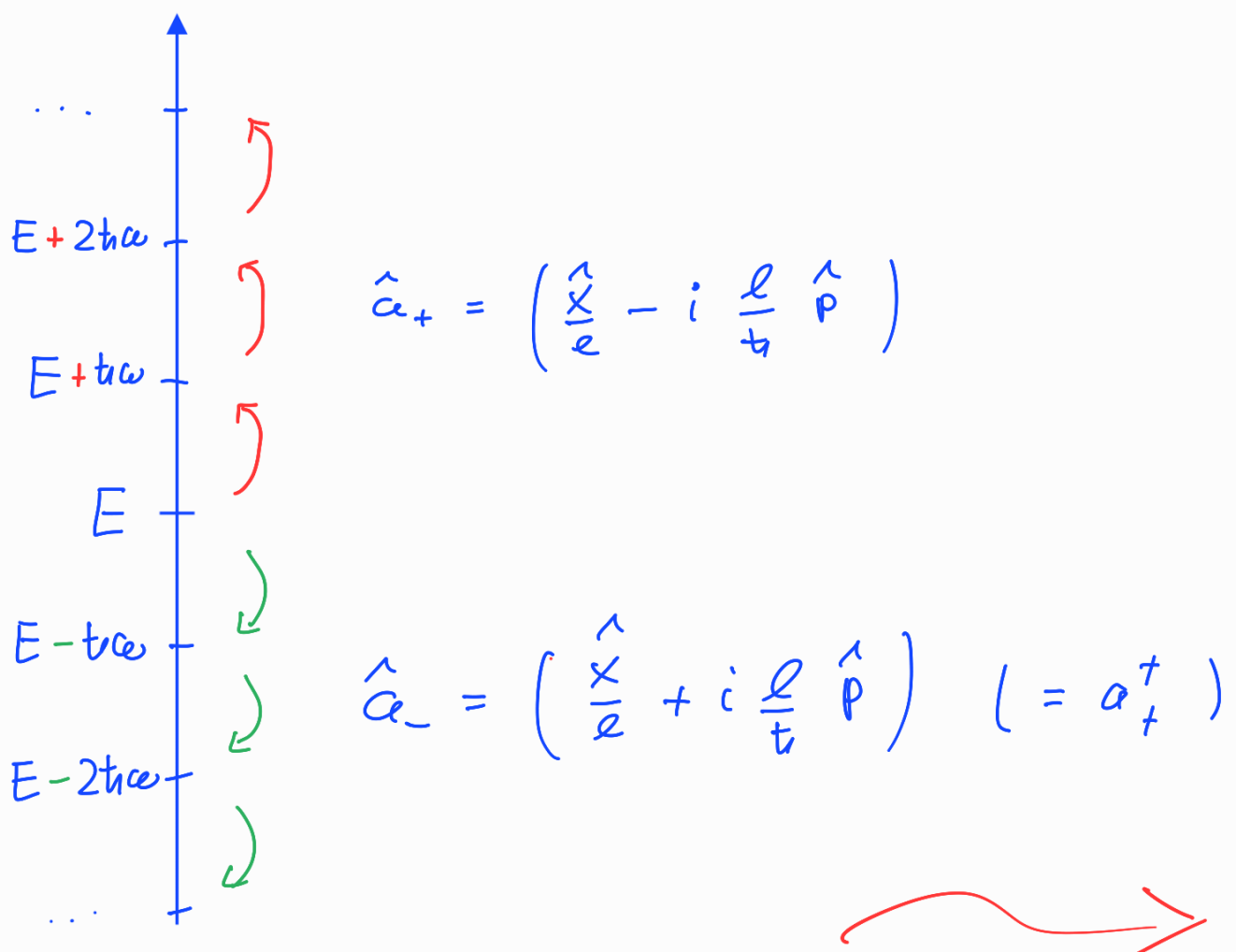
einfache aber langwierige Rechnung zeigt:

$\psi_E(x)$ Eigenfkt. mit Energie E

$$\Rightarrow \psi_{E_{\pm}}(x) := \begin{pmatrix} \frac{x}{\ell} & \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \ell \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \psi_E(x)$$

Eigenfkt mit Energie $E_{\pm} = E_{\pm} \pm \hbar \omega$

(oder $\psi_{E_{\pm}}(x) = 0$!)



+ Ergebnis Aufgabe 27:

q.m. harmonische Oszillator:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x^2$$

→ Eigenenergien

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

zu Energieeigenfunktionen

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(\pi l^2)^{1/4}} e^{-x^2/2l^2}, \quad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\Delta x = l/\sqrt{2}$$

$$\Delta p = \hbar/\sqrt{2} l$$

$$\underline{\psi}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{x}{l} - l \frac{\partial}{\partial x} \right) \underline{\psi}_n(x)$$

Plancks ad-hoc Quantenhypothese:

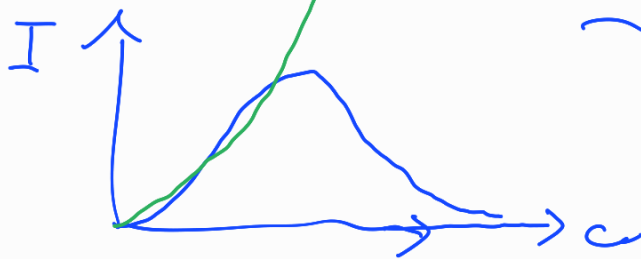
Schwingungsmodi mit Frequenz ω

haben nur gequantelte Energien

$$E_n = \Delta E \cdot n, \quad \Delta E = h \omega$$



aufweisen (1900)



→ Spektraldichte
des Schwarzkörper-
Strahlung

QM (1925)

$$E_n = \Delta E \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

!

Quantenmechanische Verschränkung:

Eigenschaft eines zusammengesetzten Quantensystems

AB

$A: \mathcal{H}_A$

ONB:

$$\{|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle\}$$

$B: \mathcal{H}_B$

ONB

$$\{|\chi_1\rangle, \dots, |\chi_m\rangle\}$$

$\mathcal{H}_{AB}:$

$$\text{ONB: } \{|\varphi_i, \chi_j\rangle\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

• $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$: "Tensorprodukt von $\mathcal{H}_A$ mit $\mathcal{H}_B$ "

$$\bullet \quad |\varphi_i, \chi_j\rangle \equiv |\varphi_i \chi_j\rangle \equiv |\varphi_i\rangle |\chi_j\rangle$$

$$\equiv |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle \equiv \varphi_i \otimes \chi_j$$

$$\bullet \quad \dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = \dim \mathcal{H}_A \cdot \dim \mathcal{H}_B \quad !$$

" $n \cdot m$ "

• Def: Tensorprodukt zweier Vektorräume

$$\mathcal{X}_A \ni |\psi_A\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i |\varphi_i\rangle$$

$$\mathcal{X}_B \ni |\psi_B\rangle = \sum_{j=1}^m \beta_j |\chi_j\rangle$$

$$|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$$

($\rightarrow$ Basisunabhängigkeit)

Bsp.:

A : mag. Mom. eines $\text{Spin-}\frac{1}{2}$

$$\mathcal{X}_A = \text{Span} \left\{ \begin{array}{c} |z+\rangle_A \\ | \uparrow \rangle_A \end{array}, \begin{array}{c} |z-\rangle_A \\ | \downarrow \rangle_A \end{array} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{array}{c} | \uparrow \rangle_A \\ | \downarrow \rangle_A \end{array} \right\}$$

B : mag. Mom. eines $\text{Spin-}\frac{1}{2}$

$$\mathcal{X}_B = \text{Span} \left\{ | \uparrow \rangle_B, | \downarrow \rangle_B \right\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{X}_{AB} &= \mathcal{X}_A \otimes \mathcal{X}_B = \\ &= \text{Span} \left\{ | \uparrow \rangle_A \otimes | \uparrow \rangle_B, | \uparrow \rangle_A \otimes | \downarrow \rangle_B, | \downarrow \rangle_A \otimes | \uparrow \rangle_B, | \downarrow \rangle_A \otimes | \downarrow \rangle_B \right\} \\ &= \text{Span} \left\{ | \uparrow \uparrow \rangle_{AB}, | \uparrow \downarrow \rangle_{AB}, | \downarrow \uparrow \rangle_{AB}, | \downarrow \downarrow \rangle_{AB} \right\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}_A \ni |X+\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A)$$

$$\mathcal{X}_B \ni |X+\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \mathcal{X}_A \otimes \mathcal{X}_B &\ni |X+\rangle_A \otimes |X+\rangle_B \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A) \right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B) \\ &= \frac{1}{2} (|\uparrow\uparrow\rangle_{AB} + |\uparrow\downarrow\rangle_{AB} + |\downarrow\uparrow\rangle_{AB} + |\downarrow\downarrow\rangle_{AB}) \end{aligned}$$

Frage: Kann man jeden Vektor/Zustand

$|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{X}_A \otimes \mathcal{X}_B$ schreiben als

$$|\psi_{AB}\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$$

für geeignete Vektoren $|\phi_A\rangle, |\phi_B\rangle$?

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\mathcal{X}_A$ $\mathcal{X}_B$

Nein!!

Beispiel: A, B : jeweils Spin $\frac{1}{2}$ (wie oben)

$$\mathcal{H}_A = \text{Span} \{ |\uparrow\rangle_A, |\downarrow\rangle_A \}$$

$$\mathcal{H}_B = \text{Span} \{ |\uparrow\rangle_B, |\downarrow\rangle_B \}$$

betrachte:

$$|\psi_{AB}\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle_{AB} + |\downarrow\downarrow\rangle_{AB} \neq |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$$

$$= (\alpha_\uparrow |\uparrow\rangle_A + \alpha_\downarrow |\downarrow\rangle_A) \otimes (\beta_\uparrow |\uparrow\rangle_B + \beta_\downarrow |\downarrow\rangle_B)$$

$$= \alpha_\uparrow \beta_\uparrow |\uparrow\uparrow\rangle_{AB}$$

$$+ \alpha_\uparrow \beta_\downarrow |\uparrow\downarrow\rangle_{AB}$$

$$+ \alpha_\downarrow \beta_\uparrow |\downarrow\uparrow\rangle_{AB}$$

$$+ \alpha_\downarrow \beta_\downarrow |\downarrow\downarrow\rangle_{AB}$$

$\rightarrow 0! \quad \alpha_\uparrow \beta_\downarrow = 0$

$\rightarrow \alpha_\uparrow = 0 \vee \beta_\downarrow = 0$

$0!$

$\alpha_\downarrow \beta_\downarrow = 0$

Def: g.m. Verschränkung

- $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ verschränkt
(bzgl. A & B)

g.d.w.

$$|\psi_{AB}\rangle \neq |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$$

für alle $|\phi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$, $|\phi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$

- $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ separabel

g.d.w. ($\equiv$ nicht verschränkt)

$$|\psi_{AB}\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$$

für geeignete $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$.

(Schödinger 1935)

Warum sind verschränkte Zustände

besonders? $\rightarrow$ zeigen "Nichtlokalität"
der QU $\rightarrow$

erstmalig aufgeführt im Paradoxon
von Einstein, Podolsky, Rosen 1935
zur Demonstration der Unvollständigkeit
mit der QM. (Vgl. 1. Vorlesung)