Wdhlg.:

Zusammengesetzte Quantensysteme

AB:

A: $\mathcal{H}_A$, ONB

$|\varphi_1\rangle, \dots |\varphi_n\rangle$

B: $\mathcal{H}_B$, ONB

$|\chi_1\rangle, \dots, |\chi_m\rangle$

$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, ONB

$$\begin{array}{llll} |\varphi_1\rangle \otimes |\chi_1\rangle, & |\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle, & \dots, & |\varphi_1\rangle \otimes |\chi_m\rangle, \\ |\varphi_2\rangle \otimes |\chi_1\rangle, & \dots, & \dots, & |\varphi_2\rangle \otimes |\chi_m\rangle, \\ \vdots & & & \vdots \\ |\varphi_n\rangle \otimes |\chi_1\rangle, & \dots, & \dots, & |\varphi_n\rangle \otimes |\chi_m\rangle \end{array}$$

- $\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = \dim \mathcal{H}_A \otimes \dim \mathcal{H}_B$

- $\left(\sum_i a_i |\varphi_i\rangle\right) \otimes \left(\sum_j b_j |\chi_j\rangle\right) = \sum_{ij} a_i b_j |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$

i.A. $|\psi_{AB}\rangle \neq |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$!

Bsp.: $|\uparrow\uparrow\rangle_{AB} + |\downarrow\downarrow\rangle_{AB} \neq |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$

→ **Def.: Verschränkung**

Zustand $|\psi_{AB}\rangle$

- verschränkt $:\Leftrightarrow$ $|\psi_{AB}\rangle \neq |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$

  für alle $|\phi_A\rangle, |\phi_B\rangle$

- separabel $:\Leftrightarrow$ $|\psi_{AB}\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$

  für geeig. $|\phi_A\rangle, |\phi_B\rangle$

⌜ $|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\uparrow\rangle_{AB} + |\downarrow\downarrow\rangle_{AB}\right)$ ist verschränkt. Zust. ⌟

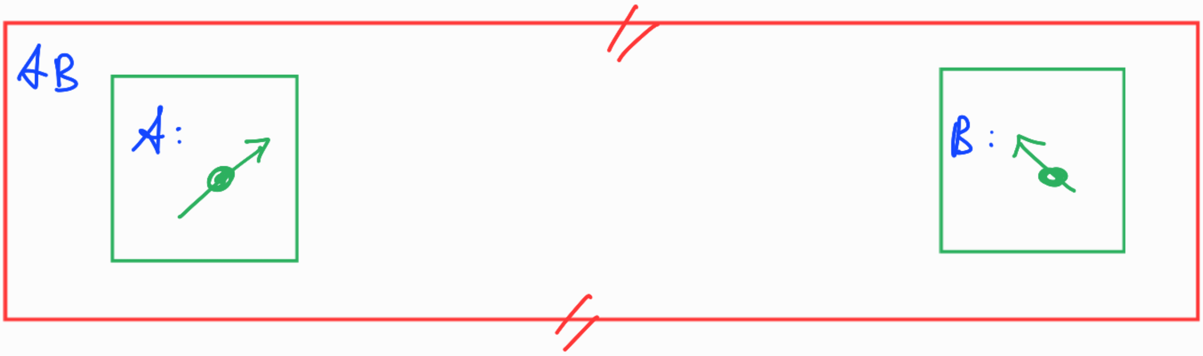
verschränkte Zustände zeigen "Nichtlokalität"!

→ Paradoxon von Einstein, Podolsky, Rosen

in Version von D. Bohm

(vgl. 1. Ülsg.) →

Anke in Aachen $\xleftrightarrow{L \approx 600\,\text{km}}$ Bernd in Berlin



Spins von Anke und Bernd (= AB) seien

im Zustand

$$\boxed{|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\uparrow\rangle_{AB} + |\downarrow\downarrow\rangle_{AB} \right)}$$

(verschränkt!)

Experiment I

- Anke misst $\mu_z^{(A)}$ zur Zeit $t = 0$

$\longrightarrow$ Ergebnis $+\mu_0$ oder $-\mu_0$ mit jeweils Wkt. $1/2$

QM : Messergebnis fundamental unbestimmt!

(da $|\psi_{AB}\rangle$ vollständige Zustandsbeschreib.)

Experiment II

- Anke misst $\mu_z^{(A)}$ zur Zeit $t = 0$;
- zudem misst Bernd $\mu_z^{(B)}$ kurz zuvor zur Zeit $t = -\Delta t$, mit $\Delta t < L/c$

QM: Bernd erhält $+\mu_0$ oder $-\mu_0$ mit Wkt. jeweils $1/2$;

angenommen $\mu_z^{(B)} = +\mu_0$

→ Zustand nach Messung:

$$|\psi'_{AB}\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle_{AB}$$

→ Bernd weiß, dass Anke zur Zeit $t=0$ ebenfalls $\mu_z^{(A)} = +\mu_0$ messen wird!

EPR: Bernds Messung kann wegen $\Delta t < L/c$ nicht Ankes Spin/Messung beeinfl. haben!

→ Messergebnisse $\mu_z^{(A)} = \mu_z^{(B)} \stackrel{!}{=} +\mu_0$ müssen schon vor Ankes und Bernds Messungen festgestanden haben!

d.h. Unbestimmtheit der Messergebnisse (vor Messung) nur scheinbar und somit nicht fundamental wie QM behauptet!

Also: QM unvollständig! (EPR 1935)

Vorschlag:

Es gibt „verborgene Variablen" einer „neuen Theorie", die den tatsächlichen Ausgang einer Messung vorherbestimmen!

(≈ EPR 1935)

J.S. Bell 1964

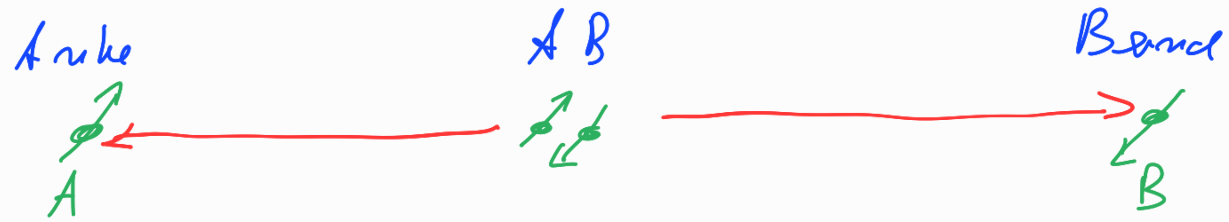
quantitative und damit experimentell überprüfbare Aussagen:

Bellsche Ungleichungen

CHSH – Ungleichung

(Clausen, Horn, Shimony, Holt; Bell)

experimentelle Situation:



Messungen Q oder R (zufällig gewählt)

mögliche Ergebnisse

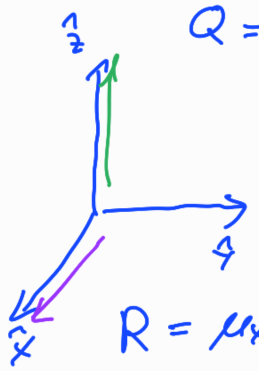
$q = \pm 1$, $r = \pm 1$

Messungen S oder T (zuff.)

mögl. Ergebnisse

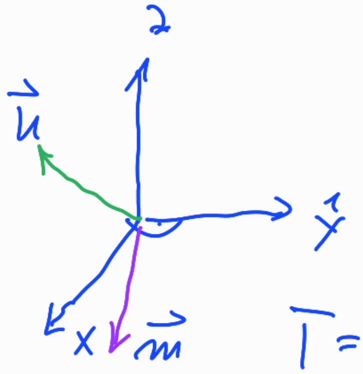
$s = \pm 1$, $t = \pm 1$

$Q = \mu_z / \mu_0$



$R = \mu_x / \mu_0$

$S = \mu_{\vec{n}} / \mu_0$



$T = \dfrac{\mu_{\vec{m}}}{\mu_0}$

Große Anzahl N an Messungen

$\longrightarrow$ Messstatistik:

	Anke:		Bernd:	
n	Messung	Ergebnis	Messung	Erg.
1	R	−1	S	+1
2	R	+1	T	−1
3	Q	−1	S	1
4	R	+1	S	−1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

→ Korrelationen:

$$\overline{RS} = \frac{1}{N_{RS}} \sum_{i=1}^{N_{RS}} r_i s_i = \frac{1}{2}(-1 \cdot 1) = -1$$

$$\overline{QS} = \frac{1}{N_{QS}} \sum q_i s_i \; ; \qquad \overline{RT} = \frac{1}{N_{RT}} \sum_i r_i t_i$$

$$\overline{QT} = \frac{1}{N_{QT}} \sum_i q_i t_i$$

CHSH: falls Messergebnisse einer

Theorie mit lokalen, versteckten Variablen genügen, folgt zwangsläufig:

$$\boxed{|\overline{QS} - \overline{QT} + \overline{RS} + \overline{RT}| \leq 2}$$

Exp.:

Team Anke | Team Charlie Präparation | Team Bernd

T. Anke kontrolle → Auswertung Statistik! ← T. Bernd kontr.

$w = +1$ | $w = +1$
$z = -1$ | $z = -1$

Zahl = Q = blau | Zahl = S = grün
Wappen = R = pink | Wappen = T = orange

QM: keine Theorie lokaler, versteckter Variablen $\rightarrow$ kann CHSH-Ungl. verletzen!

der Fall für folgende Situation:

- Spinpaar AB immer im Zustand

$$|\psi\rangle \stackrel{!}{=} \left(|\uparrow\uparrow\rangle_{AB} + |\downarrow\downarrow\rangle_{AB}\right)/\sqrt{2}$$

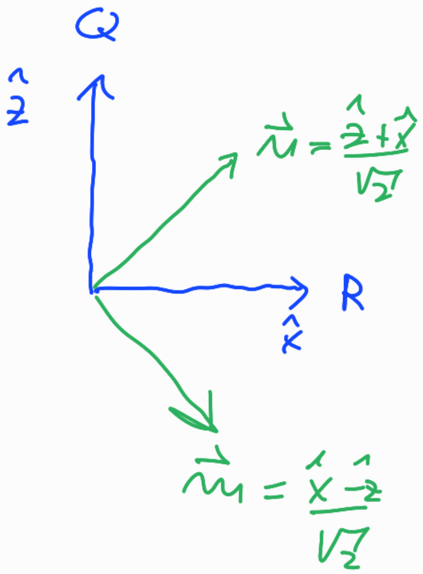
(verschränkt)

Anke

Messungen:

$\hat{Q} = \hat{\mu}_z/\mu_0$

$\hat{R} = \hat{\mu}_x/\mu_0$



Bernd

$\hat{S} = \hat{\mu}_{\vec{n}}/\mu_0$

$\hat{T} = \hat{\mu}_{\vec{m}}/\mu_0$

$\overline{QS} = \langle \hat{Q}\hat{S} \rangle_\psi = 1/\sqrt{2}$, $\quad \overline{RS} = \langle \hat{R}\hat{S} \rangle = 1/\sqrt{2}$

$\overline{QT} = \langle \hat{Q}\hat{T} \rangle_\psi = -1/\sqrt{2}$, $\quad \overline{RT} = \langle \hat{R}\hat{T} \rangle = 1/\sqrt{2}$

QM:

$$\overline{QS} \ominus \underbrace{\overline{QT}} + \underbrace{\overline{RS}} + \underbrace{\overline{RT}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2{,}8\ldots > 2\ !$$

Experimente:

Clauser	1975	zunehmende
Aspect	1982	Evidenz
⋮		pro QM
	2017	kontra Bell!

Beweis der CHSH-Ungleichung:

Annahme: verborg. Variable

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) \in \mathbb{R}^n$$

$$\lambda_0 \rightsquigarrow \quad q(\lambda_0)$$
$$r(\lambda_0)$$
$$s(\lambda_0)$$
$$t(\lambda_0)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n\lambda \, \rho(\lambda) \stackrel{!}{=} 1$$

$$\rho(\lambda) \geq 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \overline{QS} = \int d^n\lambda \, \rho(\lambda) \, q(\lambda) \, s(\lambda)$$

$\uparrow$ Wkt.-dichte des Param. λ bei Präparation

$$\overline{QT} = \int d^n\lambda \, \rho(\lambda) \, q(\lambda) \, t(\lambda)$$

$$\overline{RS} = \quad " \quad " \quad r(\lambda) \, s(\lambda)$$

$$\overline{RT} = \quad " \quad " \quad r(\lambda) \, t(\lambda)$$

$t(\lambda), q(\lambda), s(\lambda), r(\lambda) \in \{1, -1\}$

$$\to |\overline{QS} - \overline{QT} + \overline{RS} + \overline{RT}|$$

$$= \int d^4\lambda\, g(\lambda) \, \Big| \underbrace{q(\lambda)s(\lambda) - q(\lambda)t(\lambda)}_{=\, q(\lambda)(s(\lambda)-t(\lambda))} + \underbrace{r(\lambda)s(\lambda) + r(\lambda)t(\lambda)}_{r(\lambda)(s(\lambda)+t(\lambda))} \Big|$$

$$\underbrace{q(\lambda)(s(\lambda)-t(\lambda))} + \underbrace{r(\lambda)(s(\lambda)+t(\lambda))}$$

!

$s(\lambda) = t(\lambda)$: $\quad 0 \qquad \leq 2$

$s(\lambda) \neq t(\lambda)$: $\quad \leq 2 \qquad 0$

$$\leq \int d^4\lambda\, g(\lambda) \cdot 2 = 2 \,!$$

damit gezeigt: $\quad |\overline{QS} - \overline{QT} + \overline{RS} + \overline{RT}| \leq 2$

analog: $\quad |-\overline{QS} + \overline{QT} + \overline{RS} + \overline{RT}| \leq 2$

$|\overline{QS} + \overline{QT} - \overline{RS} + \overline{RT}| \leq 2$

$|\overline{QS} + \overline{QT} + \overline{RS} - \overline{RT}| \leq 2$

Ergebnis des Vorlesungsexperiments:

$N = 40, \quad N_{QS} = 7, \quad N_{QT} = 13, \quad N_{RS} = 9, \quad N_{RT} = 11$

$$\overline{QS} = 0.143$$

$$\overline{QT} = 0.231$$

$$\overline{RS} = -0.333$$

$$\overline{RT} = -0.455$$

$$\rightarrow \quad |\overline{QS} - \overline{QT} + \overline{RS} + \overline{RT}| = 0.876 \leq 2$$

d.h. CHSH-Ungleichung erfüllt;

<u>keine</u> Evidenz für paranormale

Fähigkeiten des Teams Charlie! :)