

Wiederholung:

Bellsche Ungleichungen

A



$$Q: q = \pm 1$$

$$R: r = \pm 1$$

B



$$S: s = \pm 1$$

$$T: t = \pm 1$$

lokale, "realistische" Theorie $\Rightarrow$

$$|\overline{QS} - \overline{QT} + \overline{RS} + \overline{RT}| \leq 2$$

z.B. mit versteckten Variablen

$$|\overline{QS} + \overline{QT} - \overline{RS} + \overline{RT}| \leq 2$$

$$\lambda \rightarrow q(\lambda)$$

$$r(\lambda)$$

$$s(\lambda)$$

$$t(\lambda)$$

⌋

$$|\overline{QS} + \overline{QT} + \overline{RS} - \overline{RT}| \leq 2$$

$$|-\overline{QS} + \overline{QT} + \overline{RS} + \overline{RT}| \leq 2$$

Bell/CHSH - Ungleichungen

Vorlesungsexperiment:

$$\overline{QS} = 0.143$$

$\rightarrow$ CHSH - Ungl.: erfüllt!

$$\overline{QT} = 0.231$$

z.B.

$$\overline{RS} = -0.333$$

$$|\overline{QS} - \overline{QT} + \overline{RS} + \overline{RT}| = 0.876$$

$$\overline{RT} = -0.455$$

QM $\Rightarrow$ Verletzung der CHSH-Beg.
möglich, in Übereinstimmung
mit Experimenten !

Quantencomputer

Feststellung: Quantensysteme i.d.R. wesentlich
schwieriger zu berechnen als
klassische Systeme !

Beispiel: $N = 100$ wechselwirkende Spins



Klassisch: $\vec{L}_i = l \vec{u}_i$, l konstant, $\vec{u}_i$ variabel

Dynamik:

$$\dot{\vec{u}}_i = \vec{M}_i(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N)$$

$3N$ Bewegungsgl., gekoppelt, nicht-linear

num. Integration ^(Gr)

$$\vec{u}_1(t), \vec{u}_2(t), \dots, \vec{u}_N(t)$$

^(Gr) benötigt etwa $4 \cdot 3 N$ Bytes = 1,2 kB



quantenmechanisch:

$$i\hbar \dot{|\psi\rangle} = H |\psi\rangle$$

$|\psi\rangle$: Zustandsvektor des N -Spin-System.

		<u>dim $\mathcal{H}_n$</u>
1 Spin :	$\mathcal{H}_1 = \text{Span}\{ \uparrow\rangle, \downarrow\rangle\} \cong \mathbb{C}^2$	2
2 Spins :	$\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^4$	4
3 Spins :	$\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_1 \cong \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^8$	8
4 Spins :	$\mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_1 \cong \mathbb{C}^8 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^{16}$	16
5 Spins :	$\mathcal{H}_5 \cong \mathbb{C}^{32}$	32
$\vdots$		
N Spins :	$\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1 =: \mathcal{H}_1^{\otimes N}$	
	$\rightarrow \dim \mathcal{H}_N = (\dim \mathcal{H}_1)^N = \underline{\underline{2^N}}$	

Dimension des Zustandsraums eines N -
Teilchensystems wächst exponentiell mit N !

$$\rightarrow |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{2^N} \kappa_i |\varphi_i\rangle$$

vollständige Zustandsbeschreibung benötigt

2^N komplexe Koeffizienten $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{2^N}$

$\rightarrow$ (naive!) numerische Berechnung von

$|\psi(t)\rangle$ benötigt Speicherplatz

$$M_N \simeq 8 \cdot \underline{2^N} \text{ Bytes}$$

$$N=100: \quad M_{100} = 8 \cdot 2^{100} = 8 \cdot (2^{10})^{10} \simeq 10^{31} \text{ B} \\ = \underline{\underline{10^{19} \text{ TB}}} \quad !$$

┌ Alle Daten im WWW $\simeq 80 \cdot 10^9 \text{ GB}$

$\simeq 10^7 \text{ TB} \ll 10^{19} \text{ TB} = M_{100} \underline{\underline{!}}$ └

Feynman (~1980) :

Wenn Quantensysteme so schwierig zu berechnen sind, könnte man dann nicht schwierige Rechnungen mit einem geeigneten Quantensystem erledigen?

↪ Quantencomputer!

Antwort : Im Prinzip schon

Quantencomputer = "Computer" auf

Grundlage der QM:

1) Superpositionsprinzip

$$(\Rightarrow \psi_1, \psi_2 \rightarrow \psi_N = \psi_1 \oplus \psi_2)$$

2) Messpostulat

3) Schrödingergleichung: $i\hbar \dot{|\psi\rangle} = H|\psi\rangle$



→ Zeitentwicklungsoperator $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$

$$|\psi(0)\rangle \xrightarrow{t} |\psi(t)\rangle = \underline{U(t)} |\psi(0)\rangle$$

$U(t)$ Norm-erhaltend d.h. unitär

Quantencomputer operiert auf Qubits.

Qubit $\equiv$ Quantenbit = ?

Bit $\hat{=}$ klassisches Zweizustandssystem

$$\Gamma = \{z_1, z_2\} \hat{=} \{0, 1\}$$

z.B. • $z_{1/2} = \text{Schalter AN/AUS}$



Qubit $\hat{=}$ quantenmechanisches 2-Zust.-System

$$\mathcal{H} = \text{Span} \{ |0\rangle, |1\rangle \}$$

z.B. Spin $\frac{1}{2}$:

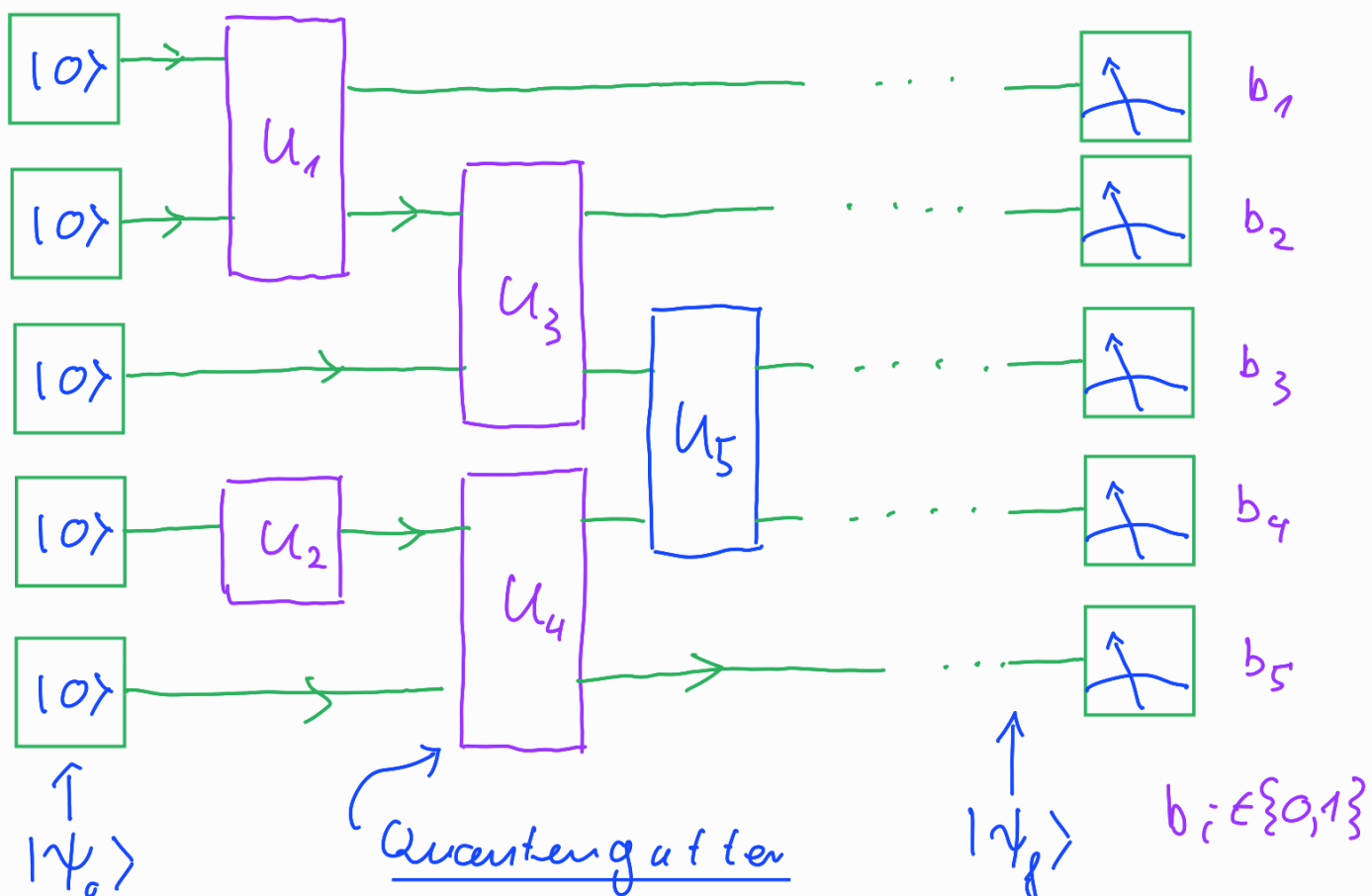
$$\uparrow \quad | \uparrow \rangle \hat{=} | 0 \rangle, \quad | \downarrow \rangle \hat{=} | 1 \rangle$$

allg. Qubitzustand:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

$$(|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$$

Quantencomputer als Quantenschaltkreis



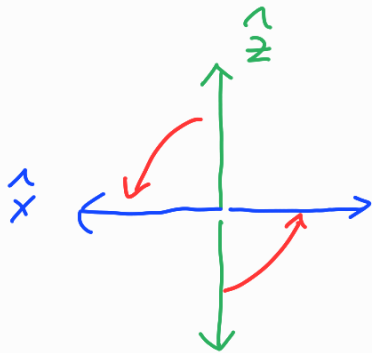
Lelementares 1-Qubit-Gatter:

„Hadamard-Gatter“:

$$|0\rangle \rightarrow \boxed{H} \rightarrow (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} = |x+\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow \boxed{H} \rightarrow (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} = |x-\rangle$$

$\hat{U} = \hat{\pi}/2$ - Spin-Rotation um $\hat{y}$ -Achse

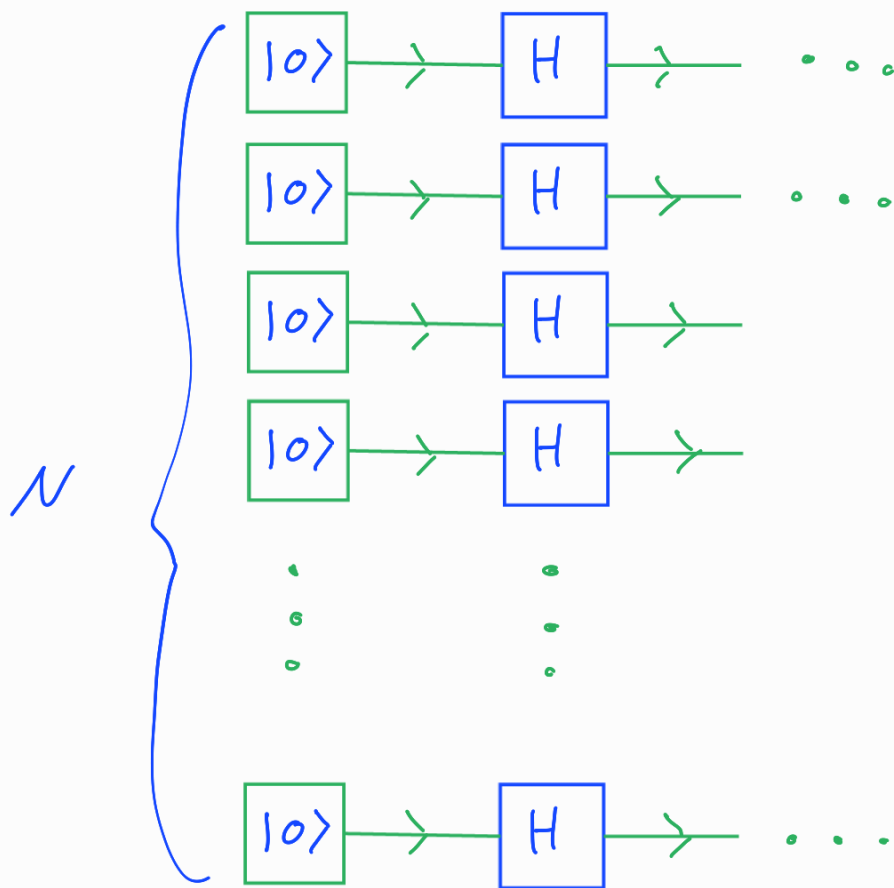


(z.B. mittels

Larmorpräzession)

$$U_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$





$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes N}$$

$$|\psi_1\rangle = ?$$

$$|\psi_1\rangle = U_H^{\otimes N} |0\rangle^{\otimes N} = (U_H |0\rangle)^{\otimes N} \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \right)^{\otimes N}$$

$$= \frac{1}{2^{N/2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$$

$$= 2^{-N/2} \left\{ |00\dots 00\rangle + |0\dots 01\rangle + |0\dots 010\rangle + |0\dots 011\rangle + \right.$$

$$|0\dots 0100\rangle + \dots$$

$\vdots$

$$|11\dots 10\rangle + |11\dots 11\rangle \} = 2^{-N/2} \sum_{i=0}^{2^N-1} |i\rangle$$

d.h. $|\Psi_1\rangle =$ Überlagerung aller 2^N
klassischen N -Bit Zustände

$\rightarrow$ simultane Berechnung auf allen 2^N

Eingaben $0, 1, 2, \dots, 2^N - 1$?

... nicht ganz

aber:

Slow Algorithms!

$\rightarrow$ ~~RSA~~

Statistische Physik und Thermodynamik

Grundproblem: makroskopische Verhalten eines Vielteilchensystem

Beispiele:

1) Gas in einem Behälter:



$N = 10^{23}$ Gaspartikel

Druck $p = ?$

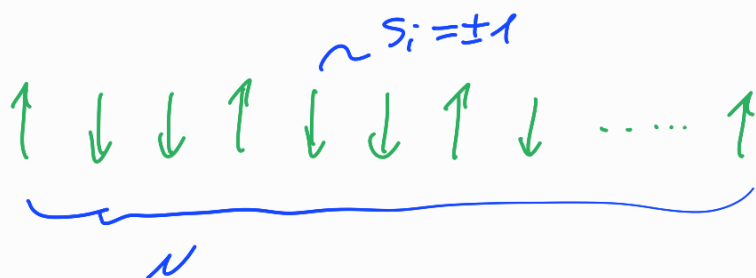
Temperatur $T = ?$

→ 
Wärmeeinzufuhr ΔQ , Entropie $S = ?$

→ $\Delta p, \Delta T = ?$

$p(T, N, V) = ?$

2) Paramagnet: N elementare mag. Momente = Spins



Magnetisierung $M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i$

als Funktion von Temp T und ab. Feld $\vec{B}$:

$$M(\vec{B}, T) = ?$$

3) Aggregatzustände: fest, flüssig, gasförmig
(Phase)

z.B. H_2O :

(1 bar)



↑
Phasenübergänge!

4) Thermodynamik

→ insbesondere: Wärmekraftmaschinen

(Dampfmaschinen, ..., Wärmepumpe)

5) Irreversibilität makroskopischer Vorgänge:

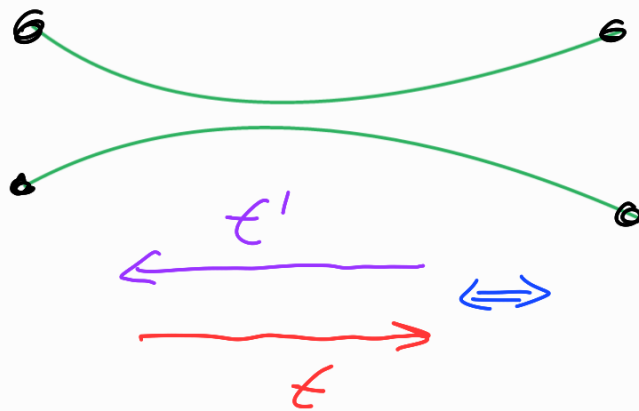


thermodynamische Zeitpfeil

┌

mikroskopische Physik (= klass. Mechanik,

E.D., QM) Zeitumkehrinvariant!



└

6) interdisziplinäre Anwendungen

- Seuchenüberwachung (Covid - Pandemie)
- Evolutionsmodelle (→ z.B. Evolution des Grippevirus)
- neuronales Netz (→ maschinelle Lernen)
KI
- Finanzmärkte
- Versorgungswirtschaft