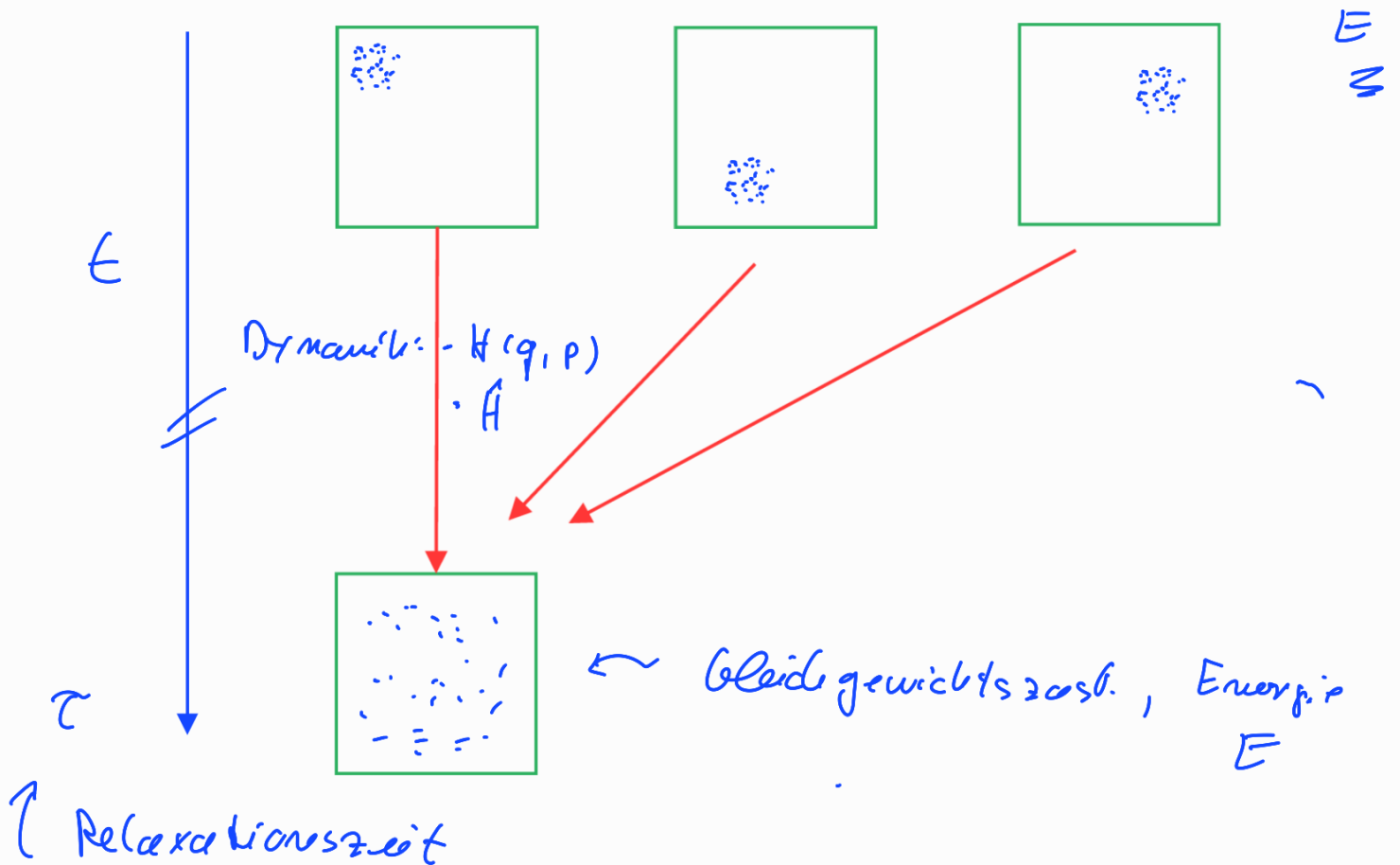


Statistische Physik: Grundlagen, Grundbegriffe

Thermodynamischen Gleichgewichtszustände

Bsp: Gas im Behälter:

Nicht-Gleichgewichtszustände, Energie



allg. Beobachtung: abgeschlossenes, makros-

kopisches System entwickelt sich nach

hinreichend langer Zeit in einen Zustand

mit konstanten makroskopischen

Eigenschaft:

thermodynamischer Gleichgewichtszustand

(kürzer: Gleichgewichtszustand
Gleichgewicht)

bedeutet: Eigenschaften des Gleichgewichts

hängen nur von erhaltenen Größen

ab: i.d.R. nur die Energie E

Aufgabe der Stat. Physik des Gleichgewichts

Bestimmung des Gleichgewichtszustandes

eines Systems anhand von

Hamiltonfunktion /-operator und

Energie E .

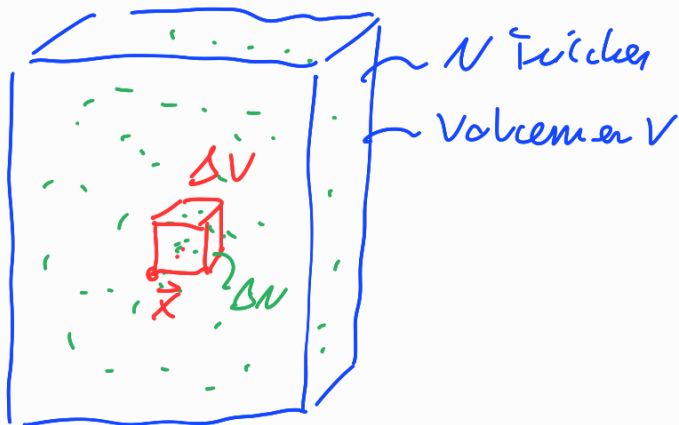
Methoden der Stat. Physik gründen auf folgende Feststellung:

Bis auf vernachlässigbar wenige Ausnahmen repräsentieren alle mikroskopischen Zustände einer gegebenen Energie E das Gleichgewicht !

2 → Gleichgewichtswert eine Größe kann durch Mittelung über alle mik. Zustände bestimmt werden.

Sehr einfaches Beispiel:

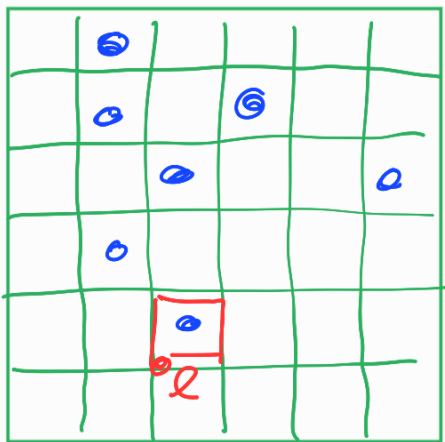
Gas im Behälter:



Teilchendichte

$$\rho(\vec{x}) = \frac{\Delta N}{\Delta V} \stackrel{!}{=} \frac{N}{V}$$

vereinfachtes Modell: "Gittergas":



← G Gitterplätze: 1, 2, ..., G

← N unterscheidbare
Teilchen $N < G$

nur einfache

Besetzung der Plätze

mittlere Besetzungszahl n_l des

Gitterplatzes l : $n_l = \frac{N}{G}$ ✓

Bestimmung von n_l gemäß obiger Methode:

mikroskopische Zustände:

$X = N$ -elementige Teilmenge
von $\{1, 2, \dots, G\}$

$$\rightarrow n_l(X) = \begin{cases} 0 & : l \notin X \\ 1 & : l \in X \end{cases}$$

$\rightarrow$ Mittel über alle mikr. Zust. X :

$$\langle n_l \rangle = \frac{1}{Z_{G,N}} \sum_X n_l(X)$$

Anzahl der mögl. mikr. Zustände X :

$$\begin{aligned} Z_{G,N} &= \text{Anzahl der } N\text{-elementigen} \\ &\text{Teilmengen von } \{1, \dots, G\} \\ &= \binom{G}{N} = \frac{G!}{(G-N)! N!} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dots &= \frac{\overbrace{G \cdot (G-1) \cdot (G-2) \cdots (G-N+1)}^{G!} \cdot \underbrace{(G-N)(G-N-1)\cdots 1}_{(G-N)!}}{\underbrace{N \cdot (N-1) \cdots 1}_{N!}} \\
 &= \frac{G!}{N! (G-N)!} =: \binom{G}{N}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \langle n_l \rangle = \frac{1}{Z_{G,N}} \sum_x n_l$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{Z_{G,N}} \left(\sum_{x: l \in x} 1 + \cancel{\sum_{x: l \notin x} 0} \right) \\
 n_l &= \begin{cases} 0: l \notin x \\ 1: l \in x \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{Z_{G,N}} \sum_{x: l \in x} 1 = \frac{Z_{G-1, N-1}}{Z_{G,N}}$$

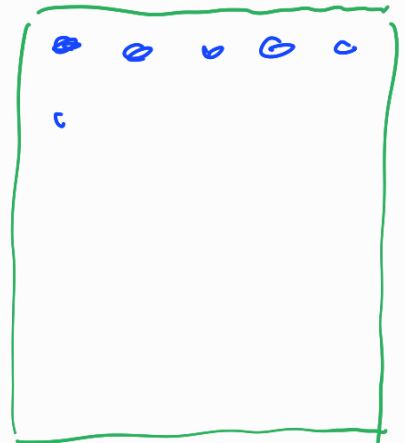
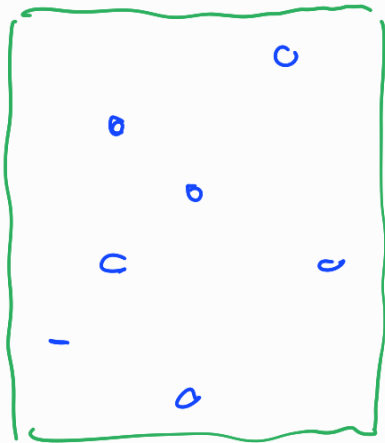
= Anzahl aller N -elementige

$Z_{G-1, N-1}$ Teilmengen mit $x \in l$

$$\text{d.h. } \langle n_e \rangle = \frac{Z_{G-1, N-1}}{Z_{G, N}} = \frac{\binom{G-1}{N-1}}{\binom{G}{N}}$$

$$= \frac{(G-1)!}{(N-1)! \cancel{(G-N)!}} \cdot \frac{N! \cancel{(G-N)!}}{G!}$$

$$= \frac{N}{G} !$$



$$n_e = \frac{N}{G} \checkmark$$

┐

Verteilung $\equiv$ Wahrscheinlichkeitsverteilung

$\equiv$ Wahrscheinlichkeitsdichte

Formalisierung:

Mikrokanonische Verteilung, mikrokanonische

Erwartungswert, mikroch. Zustandssumme

Mikrozustand

Mikrozustand $\equiv$ mikroskopischer Zustand

(a) Klassisch:

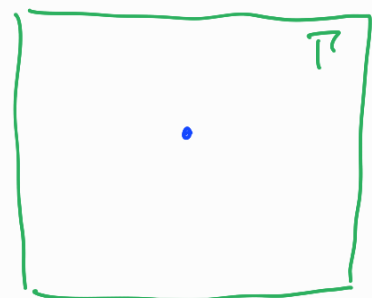
Mikrozustand = Punkt x im Phasenraum Γ

• 1 Teilchen in 1D:

$$x = (q, p) \in \Gamma_1^{1D} = \mathbb{R}^2$$

• N Teilchen in 3D:

$$x = (\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N) \in \Gamma_N^{3D} = \mathbb{R}^{6N}$$



(b) quantenmechanisch:

Mikrozustand = Energieeigenzustand



$$|\varphi_n\rangle \in \{|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots\}$$

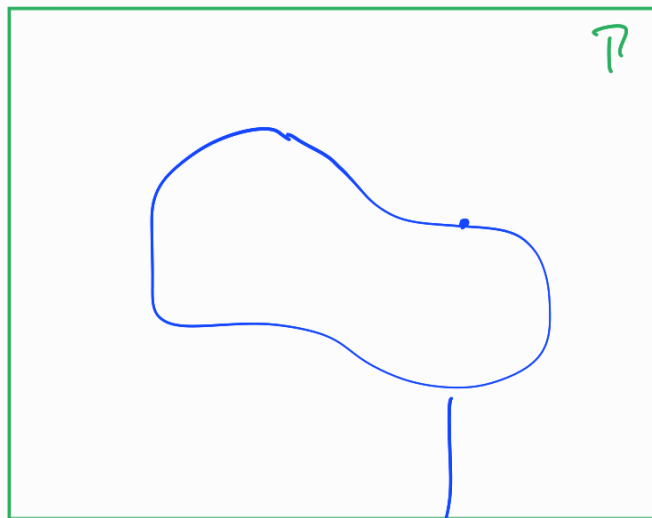
$$\downarrow \\ E_0, E_1, E_2$$

Menge aller Mikrozustände mit Energie E

(c) klassisch:

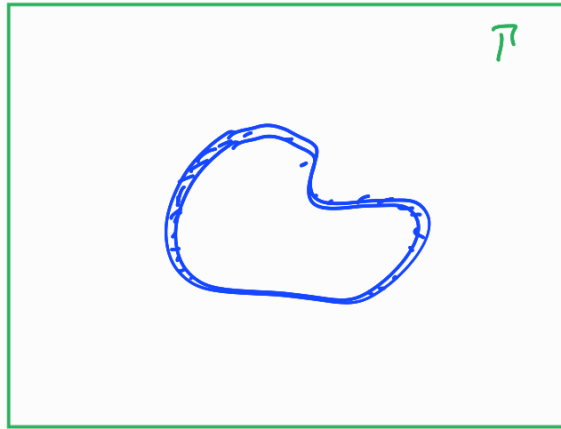
$$H(x) \stackrel{!}{=} E$$

↑
Hamiltonfkt.



Energieschale $\rightarrow \mathcal{Q}(E) = \{x \in \mathcal{P} \mid H(x) \stackrel{!}{=} E\}$

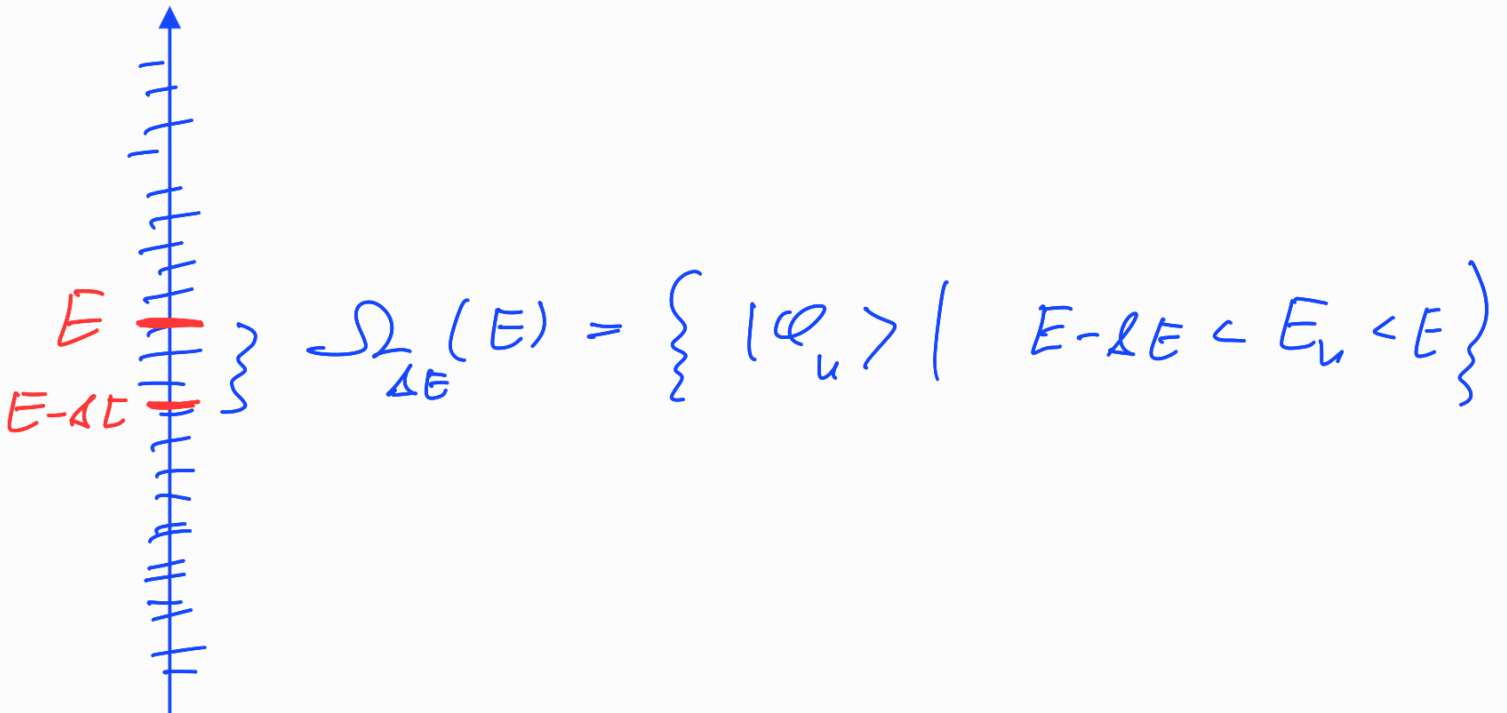
(a')



$$\Omega_{\Delta E}(E) = \{x \in T \mid E - \Delta E \leq H(x) \leq E\}$$

$$\Delta E \ll E$$

(b) g.m.:



mikrokanonischer Erwartungswert,

mikrokanonische Zustandssumme:

(a) Größe A : $A(x)$ (Phaseraumfunktion)

(a')

$$\langle A \rangle_E := \frac{1}{Z(E)} \int_{Q(E)} dx A(x)$$

$$Z(E) = \int_{Q(E)} dx 1 \quad : \quad \text{mikrokan. Zustandssumme}$$

mikrokan. Erwartungswert

