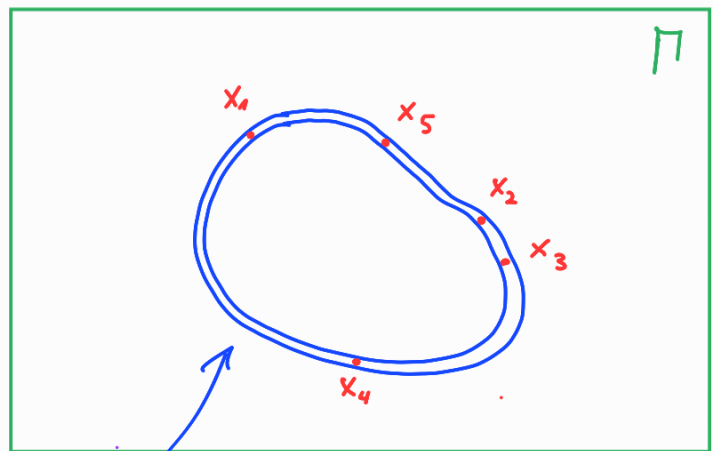
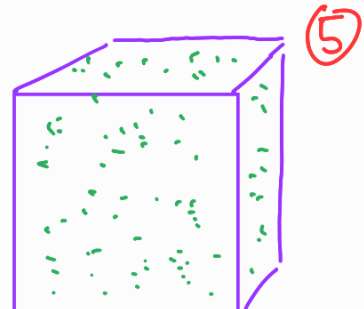
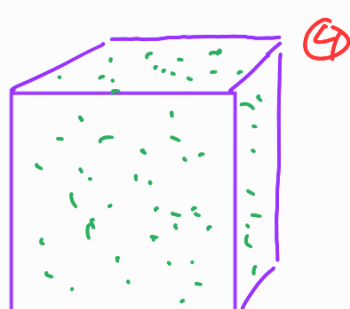
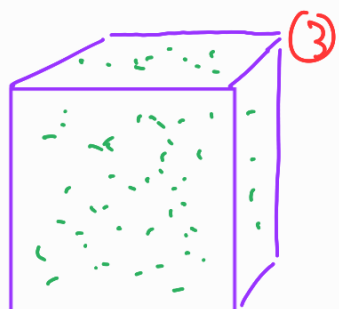
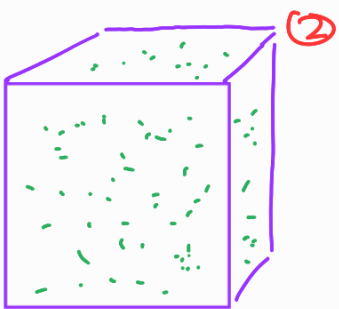
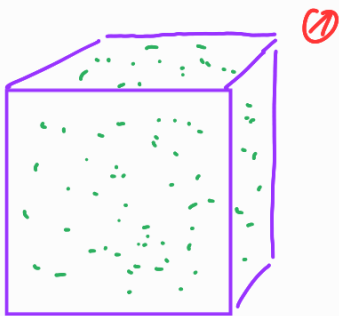


Wiederholung:

Grundannahme der Stat. Physik:

Bis auf vernachlässigbar wenige Ausnahmen repräsentieren alle mikroskopischen Zustände einer gegebenen Energie das thermod. Gleichgewicht eines mikroskopischen Systems bei Energie E .



$$\Omega(E) = \{x \mid H(x) = E\}$$

Phasenraum
 $\equiv$ Zustandsraum



Mikrokanonische Verteilung

Energieschale $\Omega(E)$:

(a) klassisch:

$$\Omega(E) = \{ x \in \Gamma \mid H(x) = E \}$$

$\uparrow$ Hamiltonfunktion

(a')

$$\Omega_{\Delta E}(E) = \{ x \in \Gamma \mid E - \Delta E \leq H(x) \leq E \}$$

(b) quantenmechanisch:


$$\Omega_{\Delta E}(E) = \{ |\varphi_i\rangle \mid E - \Delta E \leq E_i \leq E \}$$

$\uparrow$
Energieeigenzustand
zur Energie E_i

(des N-Teilchen Systems)

Mikrokanonischer Erwartungswert

(a) Größe $A = \text{Abb. } A: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto A(x)$

$$\langle A \rangle_E = \frac{1}{Z(E)} \int_{\Omega(E)} dx A(x)$$

$Z(E)$: mikrokanonische Zustandssumme

$$Z(E) = \int_{\Omega(E)} 1 dx$$

(b) Observable $A = \text{Operator } A \text{ auf } \mathcal{H}_N$

$$\langle A \rangle_E = \frac{1}{Z_{\Delta E}(E)} \sum_{|\varphi\rangle \in \Omega_{\Delta E}(E)} \langle A \rangle_{|\varphi\rangle}$$

$$Z_{\Delta E}(E) = \sum_{|\varphi\rangle \in \Omega_{\Delta E}(E)} 1 = \text{Anzahl Zustände in } \Omega_{\Delta E}(E)$$

→ mikrokanonische Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$(a) \quad S_E(x) := \frac{1}{Z(E)} \delta(H(x) - E)$$

$$\rightarrow \langle A \rangle_E = \int_{\Gamma} dx \, S_E(x) A(x)$$

(b) mikrokanonische Dichteoperator:

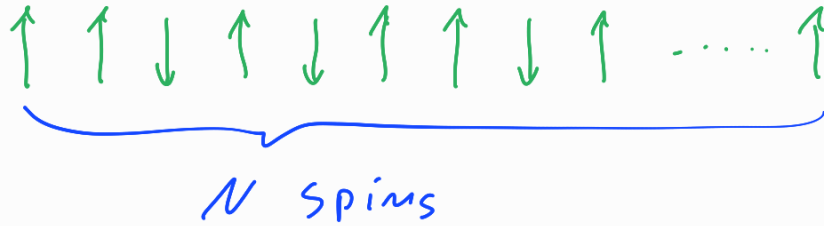
$$\hat{S}_E := \frac{1}{Z(E)} \sum_{|\varphi\rangle \in \Omega(E)} |\varphi\rangle \langle \varphi|$$

$$\rightarrow \langle A \rangle_E = \sum_i \langle \varphi_i | \hat{S}_E \hat{A} | \varphi_i \rangle$$

$$(=: \text{Spur}(\hat{S}_E \hat{A}))$$

Beispiel: Para-magnet im Magnetfeld

$$\vec{B} = B \hat{z}$$



$$1 \text{ Spin: } \mathcal{H}_1 = \text{Span} \left\{ \underset{\substack{| \uparrow \rangle \\ | +1 \rangle}}{| \uparrow \rangle}, \underset{\substack{| \downarrow \rangle \\ | -1 \rangle}}{| \downarrow \rangle} \right\} = \text{Span} \{ |s\rangle \mid s = \pm 1 \}$$

$$N \text{ Spins: } \mathcal{H}_N = \mathcal{H}_1^{\otimes N} = \text{Span} \{ |s\rangle = |s_1 s_2 s_3 \dots s_N\rangle \mid s_k = \pm 1 \}$$

(2^N orth. Zustände!)

Energieeigenzustände

$$1 \text{ Spin: } \uparrow : | \uparrow \rangle = | +1 \rangle : E_{+1} = \frac{\mu_0}{2} B$$

$$\downarrow : | \downarrow \rangle = | -1 \rangle : E_{-1} = -\frac{\mu_0}{2} B$$

$\uparrow$
 s_1

$$E(s_1) = \frac{\mu_0}{2} B \cdot s_1$$

$$N \text{ Spins: } |SS\rangle = |s_1 s_2 \dots s_N\rangle$$

Energieeigenzustand zur Energie

$$E(S) = \sum_{e=1}^N E(s_e) = \frac{\mu_0 B}{2} \sum_{e=1}^N s_e$$

$$\frac{\mu_0 B s_e}{2}$$

Mikrokanonische Zustandssumme

$Z(E)$:

$$E(S) = \frac{\mu_0 B}{2} \sum_{e=1}^N s_e$$

$$= \frac{\mu_0 B}{2} (N_+ - N_-)$$

N_+ = Anzahl der Spins mit $s = +1$

N_- = " " " " $s = -1$

$$\hookrightarrow N_- = N - N_+$$

$$E = \frac{\mu_0 B}{2} (2N_+ - N)$$

$$E = \frac{\mu_0 B}{2} (2N_+ - N)$$

$$E \text{ vorgegeben} \rightarrow N_+ = \frac{E}{\mu_0 B} + \frac{N}{2} = \left(\frac{E}{\mu_0 B N} + \frac{1}{2} \right) N$$

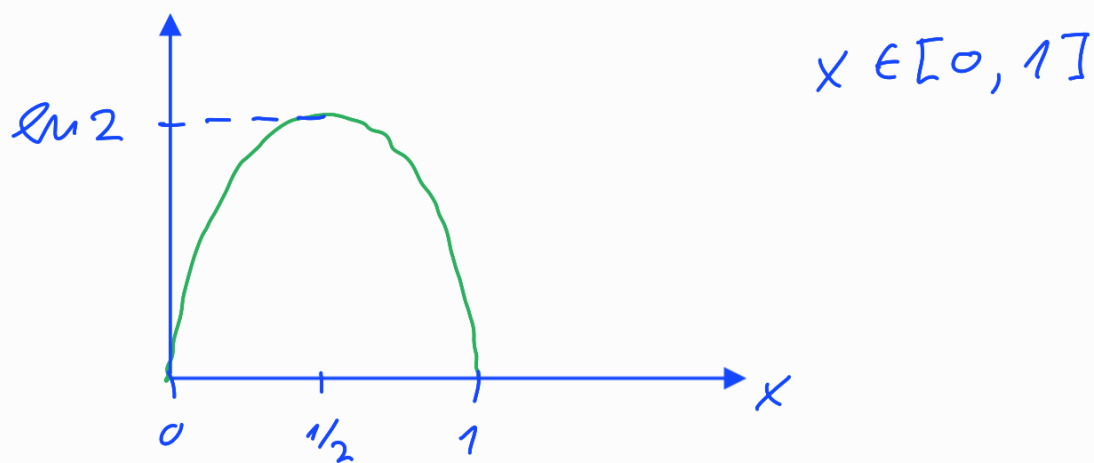
$\rightarrow Z(E) = \# \text{ Anzahl Spinzust. mit } N_+ \text{ Spins}$
 im Zustand $+1$, $N - N_+$ Spins
 im Zustand -1

$$= \binom{N}{N_+} = \binom{N}{\left(\frac{1}{2} + \frac{E}{\mu_0 B N} \right) N}$$

$$= \exp \left(N \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{E}{\mu_0 B N} \right) \right) \quad .$$

$\uparrow$
 Aufgabe 32: $\binom{n}{\lambda n} = e^{n h(\lambda)}$

$$h(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$$



("binäre Entropie")

$$Z(E) = \exp\left(N \left(h\left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{E}{\mu_0 B N}}_{\mu}\right) \right)\right)$$

$$h\left(\frac{1}{2} + \mu\right) = h\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{h'\left(\frac{1}{2}\right)}_0 \mu + \frac{1}{2} h''\left(\frac{1}{2}\right) \mu^2$$

$$\begin{array}{l} \uparrow h'(x) = -\ln x + \ln(1-x) \\ h''(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-x^2} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} x = 1/2 \\ : 0 \\ : 4 \end{array} \right\}$$

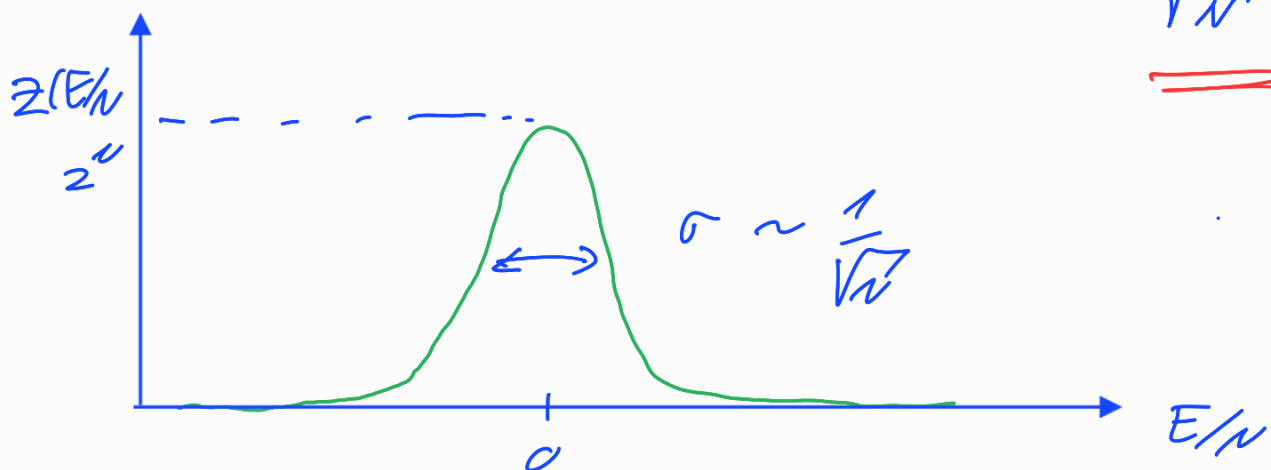
$$\rightarrow h\left(\frac{1}{2} + \mu\right) = \ln 2 - 2\mu^2 + \mathcal{O}(\mu^4)$$

$$\rightarrow Z(E) = 2^N e^{-2N \left(E/\mu_0 B N\right)^2}$$

$$Z(E) = 2^N e^{-2N \left(E / \mu_0 B N \right)^2}$$

$$Z(E/N) = 2^N \exp\left(-\frac{2N}{\mu_0^2 B^2} (E/N)^2\right)$$

$$= 2^N e^{-\frac{(E/N)^2}{2\sigma^2}} \quad \therefore \quad \sigma = \frac{\mu_0 B}{\sqrt{N}} \cdot \frac{1}{2}$$



mikrokanonischer Erwartungswert:

• Größe: Magnetisierung: $M = \sum_{\ell=1}^N s_{\ell} = \frac{2E}{\mu_0 B}$

$$\Rightarrow \langle M \rangle_E = \frac{2E}{\mu_0 B}$$

• Magnetisierung der Spins 1 bis $L < N$:

$$M_L = \sum_{\ell=1}^L s_{\ell} :$$

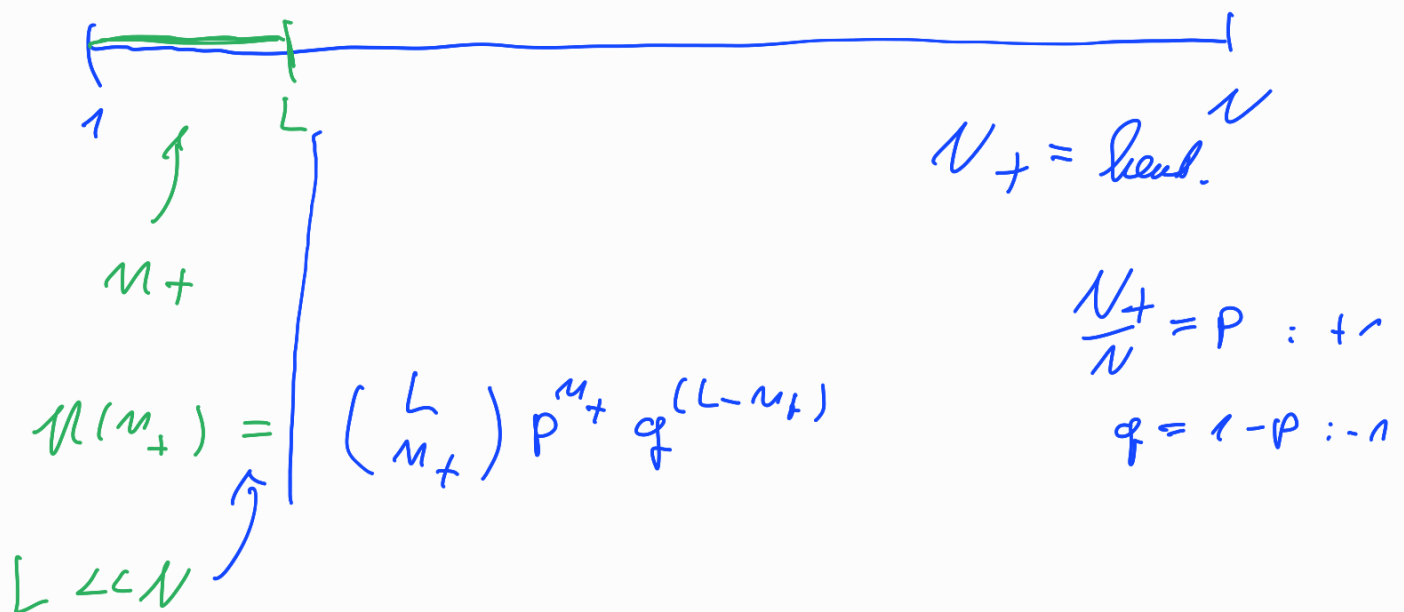
$$\langle M_L \rangle_E \stackrel{!}{=} \frac{L}{N} \langle M \rangle_E$$

2) Gedankenexperiment

Zufalls experiment:

- 1) Ziehe Mikrozustand aus $\Omega(E)$
- 2) bestimme $M_L(x)$

→ Wahrscheinlichkeit $P(M_L(x) = m) = ?$



$$P(m_+) = \binom{L}{m_+} p^{m_+} q^{(L-m_+)}$$

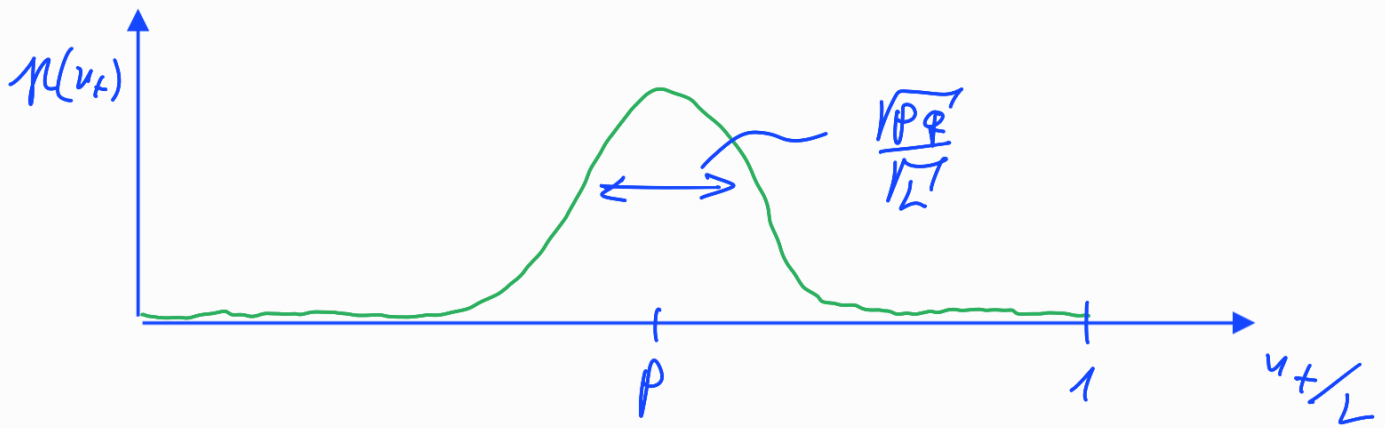
$N_+ = \text{best.}$

$\frac{N_+}{N} = p : +1$
 $q = 1-p : -1$

$L \ll N$

$$\leadsto \langle n_+ \rangle = pL$$

$$\sigma^2 = \langle (n_+ - pL)^2 \rangle = Lpq \leadsto \sigma = \sqrt{Lpq}$$



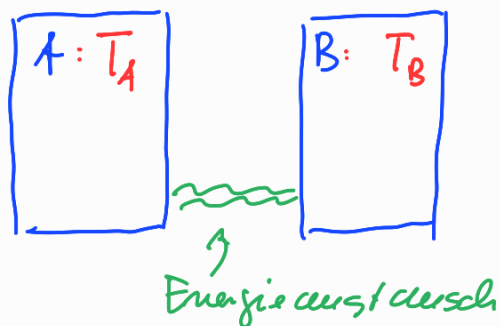
→ Gleichgewichtswert

≡ mikrokanonischen Erwartungswert

≡ wahrscheinlichster Wert

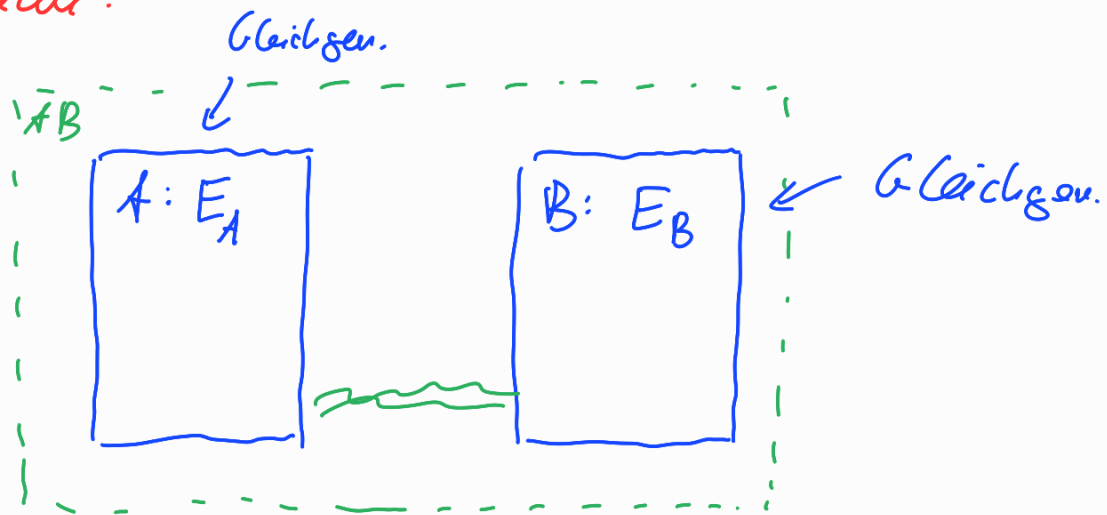
Temperatur und Entropie der mikrokanonischen Verteilung

Temperatur: wichtigste Eigenschaft:



! $\Leftrightarrow$ A und B im Gleichgewicht
 $T_A = T_B$

Unde suchen:



A+B im Gleichgewicht?

Gesamtenergie $E = E_A + E_B = \text{konst.}$

Energie des Teilsystems A: $E_A \leftarrow$ variable!!
v v v B: $E_B = E - E_A$

A und B im Gleichgewicht

$\Rightarrow E_A = E_A^0$ und $E_B = E_B^0$
Gleichgewichtswerte gemäß mikrosk. Verteilung!