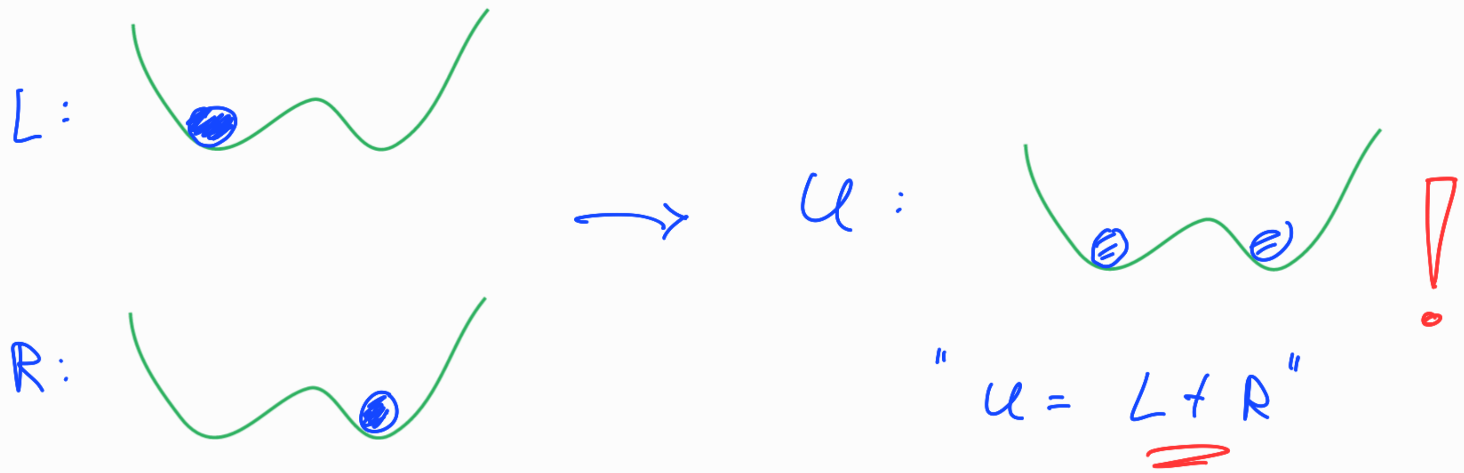
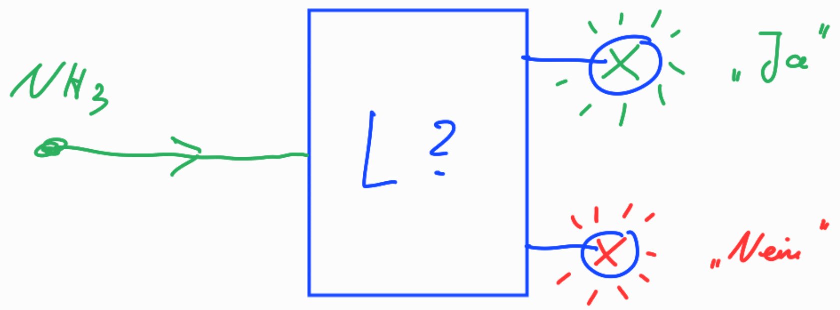
gestern: zwei wesentliche Merkmale der QM:

1) Überlagerungsfähigkeit der Zustände:



2) Messung:



Liegt Zustand L vor?

QM: Ausgang i.d.R. unbestimmt, aber

Wahrscheinlichkeiten für "Ja / Nein" berechenbar!

Superposition $\hat{=}$ Vektoraddition!

1. Postulat (vorläufig)

a) Zustandszustandraum (eines Systems S) $\hat{=}$ Vektorraum $\mathcal{H}_S$

b) Zustand $\hat{=}$ Vektor $\varphi \in \mathcal{H}_S$

Beispiele:

a) Doppelmuldenpot.:

 : Zustand L $\hat{=}$ $\varphi_L \in \mathcal{H}_D$

 : Zustand R $\hat{=}$ $\varphi_R \in \mathcal{H}_D$

$$\mathcal{H}_D \ni \varphi_L, \varphi_R \longrightarrow \varphi_L + \varphi_R =: \psi \in \mathcal{H}_D$$

Vektoraddition!

d.h. ψ ist Zustand des Systems

"Überlagerung/Superposition der Zustände φ_L und φ_R"

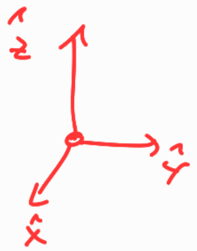
$\mathcal{H}_D$? $\qquad \dim \mathcal{H}_D \geq 2$

b) Spin $1/2$: „Eigendrehimpuls" gewisser elementar. Teilchen (Elektron, Proton, ...) mit konst. Betrag $(\hbar \cdot 1/2)$

$\longrightarrow$ magn. Moment $\vec{\mu}$ von konst. Betrag $|\vec{\mu}| = \mu_0$

$\leftarrow$ mag. Dipolmoment $\vec{\mu} = \mu_0 \hat{n}$

(klassisch!)



- $\vec{\mu} = \mu_0 \hat{z}$: „up" $\hat{=}$ Zustand $\varphi_{up} \in \mathcal{H}_S$
- $\vec{\mu} = -\mu_0 \hat{z}$ „down" $\hat{=}$ $\varphi_{down} \in \mathcal{H}_S$
- $\vec{\mu} = \mu_0 \hat{x}$ „X_+" $\hat{=}$ $\varphi_{X+} \in \mathcal{H}_S$
- $\mu = -\mu_0 \hat{x}$ „X_-" $\hat{=}$ $\varphi_{X-} \in \mathcal{H}_S$

$\rightsquigarrow$ $\psi_+ = \varphi_{up} + \varphi_{down}$ Zustand!

$\psi_- = \varphi_{up} - \varphi_{down}$ " " !

$\mathcal{H}_S$? : $\dim \mathcal{H}_S \geq 2$ (tatsächlich $\dim \mathcal{H}_S = 2$!)

QM: Superpositionsprinzip universell!

auch für makroskopische Systeme??

Schrödinger: etwa auch für Katze?!?

wenn ja:

 Zustand "lebendig" $\hat{=}$

 Zustand "tot" $\hat{=}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi_L \in \mathcal{H}_K \\ \varphi_t \in \mathcal{H}_K \end{array}}$$

$$\mathcal{H}_K \ni \psi = \varphi_L + \varphi_t$$

$\hat{=}$ Zustand "Katze zugleich lebendig und tot" ??

heute wissen wir:

Falls QM richtig, danach Zustand ψ der Katze praktisch unbeobachtbar!! (Dekohärenz H.D. Zeh ~1970!)

offene Fragen: z.B.: 

$$\varphi_L + \varphi_R = \varphi_+$$

$$\varphi_L - \varphi_R = \varphi_-$$

wie verhält sich φ_L zu φ_R

im Vergleich zu φ_L zu φ_+

$\rightarrow$ Zustandsraum $\mathcal{H}$ benötigt mehr Struktur!

"Geometrie"

---

1. Postulat (endgültig)

a) Zustandsraum $\hat{=}$ unitärer(*) Vektorraum $\mathcal{H}$

b) Zustand $\hat{=}$ normierten Vektor $\varphi \in \mathcal{H}$

(*) d.h.: $\mathcal{H}$ $\underbrace{\text{komplexer VR}}_{\alpha)}$ mit hermiteschem $\underbrace{\text{Skalarprodukt}}_{\beta)}$.

a) komplex VR: Skalarmultiplikation mit komplexen Zahlen!

$$\varphi \in \mathcal{H}, \ \lambda \in \mathbb{C} \rightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{H}$$

Bsp: $\mathbb{C}^2 := \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \middle| \ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$

$$\lambda \in \mathbb{C} \rightarrow \lambda\varphi = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 \end{pmatrix}$$

Basis: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 e_1 + z_2 e_2$$

andere Basis: $f_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \ f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = -i z_1 f_1 - i z_2 f_2$$

b) hermitesches Skalarprodukt:

$$\mathcal{H} \ni \varphi, \psi \longmapsto \langle \varphi, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$

mit Eigenschaften:

(i) Symmetrie: $\langle \varphi, \psi \rangle \overset{!}{=} \langle \psi, \varphi \rangle^*$

(ii) Positivität: $\underbrace{\langle \varphi, \varphi \rangle}_{\in \mathbb{R}} \overset{!}{>} 0 \quad (\varphi \neq \vec{0})$

(iii) Linearität:

$$\langle \varphi, \lambda \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle$$

$$\langle \varphi, \psi + \chi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \chi \rangle$$

$$\ulcorner \xrightarrow[(i)]{} \quad \langle \lambda \varphi, \psi \rangle = \lambda^* \langle \varphi, \psi \rangle \quad \lrcorner$$

$\rightarrow$ • <u>Betrag/Norm</u>: $\quad |\varphi| := \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$

• φ normiert $:\Leftrightarrow \quad |\varphi| = 1$

(d.h. $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$

• φ orthogonal $\psi \quad :\Leftrightarrow \quad \langle \varphi, \psi \rangle \overset{!}{=} 0$

Bsp. <u>Doppelmulde</u>:

 L: $\quad \varphi_L \in \mathcal{H}_D, \quad |\varphi_L| = 1$

 R: $\quad \varphi_R \in \mathcal{H}_D \quad |\varphi_R| = 1$

tatsächlich: $\langle \varphi_R, \varphi_L \rangle = 0$ o.k.

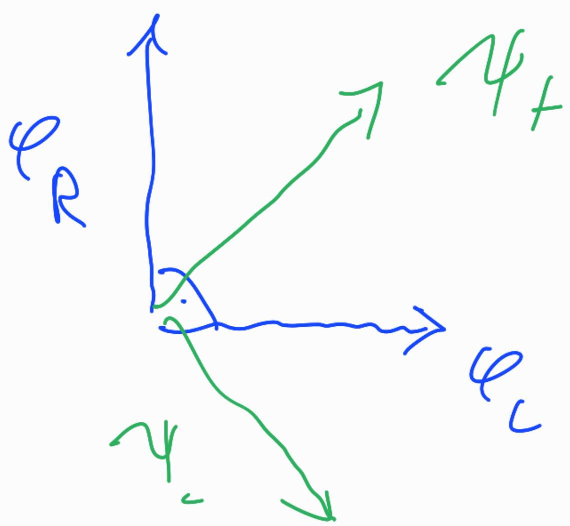
φ_R orthogonal φ_L !

$$\psi_+ = (\varphi_L + \varphi_R)/\sqrt{2}$$
$$\psi_- = (\varphi_L - \varphi_R)/\sqrt{2}$$

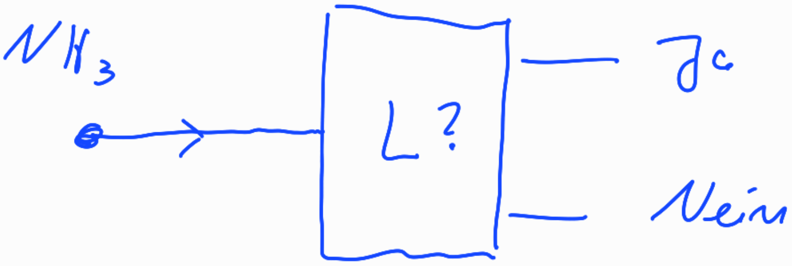
Norm von ψ_+ ?

$$|\psi_+|^2 = \langle \psi_+, \psi_+ \rangle = \frac{1}{2}\langle \varphi_L + \varphi_R, \varphi_L + \varphi_R \rangle$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\langle \varphi_L, \varphi_L \rangle}_{=1} + \underbrace{\langle \varphi_L, \varphi_R \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \varphi_R, \varphi_L \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \varphi_R, \varphi_R \rangle}_{=1}\Big)$$

$$= 2/2 = 1$$



Messung in der QM:



Teilchen in
der linken Mulde

<u>2. Postulat</u> (Messpostulat, Bornsche Regel)

a) Für jeden Zustand $\varphi \in \mathcal{H}$ eines Systems gibt es eine Messung M_φ mit zwei möglichen Ergebnissen:

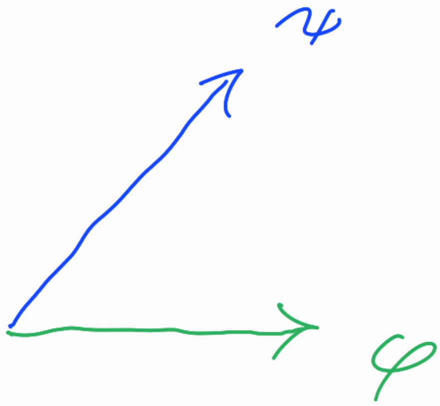
„1" $\hat{=}$ "System im Zust. φ" ("positiv")

„0" $\hat{=}$ "System nicht im Zust. φ" ("negativ")

b) Messung M_φ an System im Zustand $\psi \in \mathcal{H}$ positiv mit Wahrscheinlichkeit $p = |\langle \varphi, \psi \rangle|^2$.

1) Zusatz:

Messung M_φ ideal $:\Leftrightarrow$ nach positiver Messung System in Zust. φ



M_φ