

gostern:

$$s_\ell = \pm 1$$

• Paramagnet:

$\uparrow \downarrow \downarrow \uparrow \uparrow \downarrow \dots \uparrow$

$$\vec{B} = B \hat{z}$$

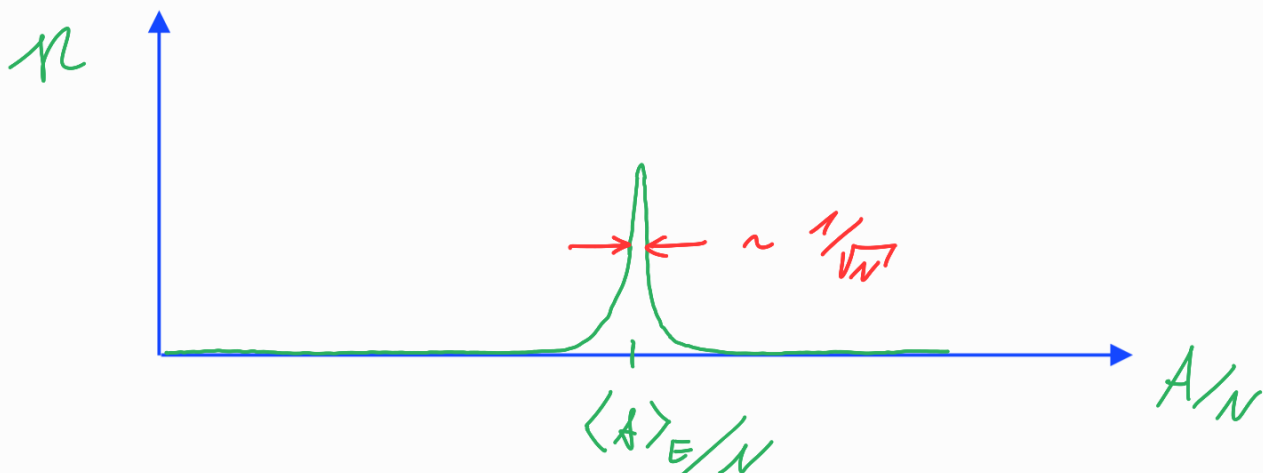
$$|S\rangle = |s_1 s_2 \dots s_N\rangle \rightarrow \bar{E}(S) = \frac{\mu_0 B}{2} \sum_{\ell=1}^N s_\ell$$

$$\rightarrow Z(E) = \binom{N}{N_+(E)} = \exp\left(N \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{E}{\mu_0 B N}\right)\right)$$

• Gleichgewichtswert

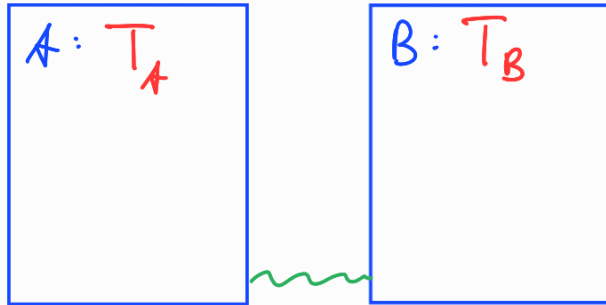
$\equiv$ Erwartungswert

$\equiv$ wahrscheinlichster Wert



Temperatur und Entropie der mikrokanonischen Verteilung

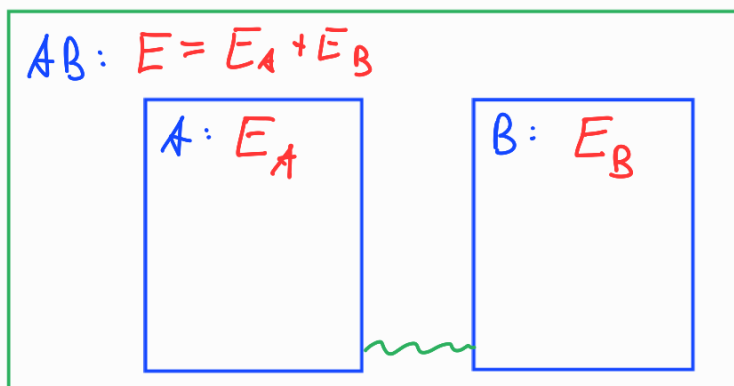
Temperatur (Thermodynamisch)



A und B im Gleichgewicht

$$\Leftrightarrow T_A \stackrel{!}{=} T_B$$

Statistische Physik



A und B im Gleichgewicht

$\Leftrightarrow$

$$E_A = \bar{E}_A^0 \quad \text{und} \quad E_B = \bar{E}_B^0$$

Gleichgewichtswerte von $E_{A/B}$ gem. mikr. Vert.

$$E_A^{\circ} = \langle H_A \rangle_E, \quad E_B^{\circ} = \langle H_B \rangle_E$$

Gesamtenergie $E = E_A + E_B$

$$\mathcal{O}_{XB}(E) \subset \mathbb{T}_X \times \mathbb{T}_B$$

hier einfacher:

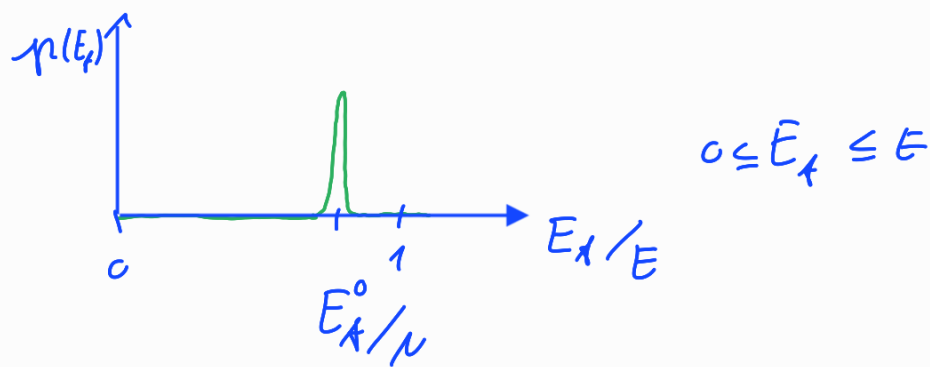
E_A^0 = wahrscheinlichster Wert, d.h. E_A^0

ist Stelle des Maximums von

$$\mu(E_A) = \text{Wkt, dass für } X \in \Omega_{AB}(E) : H_A(X) = E_A$$

$$= \frac{\text{Anzahl Zust. in } \Omega_A(E_A) \cdot \text{Anzahl Zust. in } \Omega_B(E-E_A)}{\text{Anzahl Zust. in } \Omega_{AB}(E)}$$

$$\eta(E_A) = \frac{Z_A(E_A) \cdot Z_B(E-E_A)}{Z_{AB}(E)} \quad E_D = E - E_A$$



→ E_A^0 ist bestimmt durch $n'(E_A^0) = 0$

$$\frac{d}{dE_A} n(E_A) = \frac{d}{dE_A} \frac{z_A(E_A) z_B(E-E_A)}{z_{AB}(E)}$$

$$= \frac{1}{z_{AB}(E)} \left(z_A'(E_A) z_B(E-E_A) - z_A(E_A) z_B'(E-E_A) \right)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dE_A} n(E_A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_A'(E_A)}{z_A(E_A)} \stackrel{!}{=} \frac{z_B'(E-E_A)}{z_B(E-E_A)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\ln z_A)'(E_A) = (\ln z_B)'(E_B)}$$

Gleichgewichtsbedingung!

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

2

$$T_A = T_B \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ im Gleichgewicht} \Leftrightarrow (\ln z_A)'(E_A) = (\ln z_B)'(E_B)$$

$\rightarrow \boxed{\beta := \frac{\partial}{\partial E} \ln Z(E)}$ ermöglicht

zu entscheiden ob Systeme im Gleichgewicht sind; genau wie Temperatur!

$T_A = T_B \iff A \text{ und } B \text{ im GGW} \iff \beta_A = \beta_B$

$\rightarrow T = f(\beta)$ f monoton
 bezüglich: $T = \frac{1}{\beta}$

Def.: Temperatur und Entropie der mik. Verteilung
 $\rightarrow Z(E)$

• Temperatur des Systems bei Energie E

$\boxed{\frac{1}{T(E)} = k \frac{\partial}{\partial E} \ln Z(E)}$

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$: Boltzmannkonstante

($\rightarrow$ Übereinstimmung mit TD)

• inverse Temperatur

(s. Beispiel 1)

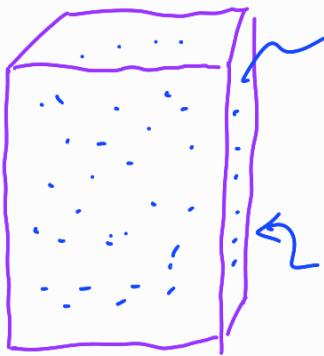
$\boxed{\beta(E) := \frac{\partial}{\partial E} \ln Z(E)} \quad \left(= \frac{1}{kT} \right)$

- Entropie des mik. Vert.

$$S(E) := k \ln Z(E)$$

$$\rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \quad (\text{wie in TD?})$$

Beispiel 1: ideales Gas



$N \gg 1$ Teilchen gleicher Masse m ,
keine W.W. untereinander

$$X = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N) \in \underbrace{G^N \times \mathbb{R}^{3N}}_{= \Gamma_N}$$

$$G \subset \mathbb{R}^3$$

$$\text{Vol}(G) = \int_G d^3\vec{r} \, 1 = V$$

$$H(x) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N |\vec{p}_i|^2$$

Berechnung der Zustandssumme

$$\underline{\underline{Z(E)}} = \int dx \cdot 1$$

$$\frac{Q(E)}{\Delta E} \subset G^V \times \mathbb{R}^{3N}$$

$$= \int \underbrace{d\vec{r}_1}_{\underbrace{G}_V} \int \underbrace{d\vec{r}_2}_{\underbrace{G}_V} \dots \int \underbrace{d\vec{r}_N}_{\underbrace{G}_V} \underbrace{\int d\vec{p}_1 \dots \int d\vec{p}_N}_{\mathbb{R}^3 \mathbb{R}^3} 1$$

$$\underbrace{E - \Delta E \leq \frac{1}{2m} \sum_i |\vec{p}_i|^2 \leq E}_{\gamma < 1} \quad | : E$$

$$1 - \frac{\Delta E}{E} \leq \sum_i \left| \frac{\vec{p}_i}{\sqrt{2mE}} \right|^2 \leq 1$$

$\gamma < 1$

$$= \underbrace{V^N}_{\uparrow} (2mE)^{3N/2} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{u}_1 \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{u}_2 \dots \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{u}_N}_{\gamma < 1}$$

Substitution: $\vec{p}_i = \sqrt{2mE} \vec{u}_i$

$$1 - \gamma \leq \sum |\vec{u}_i|^2 \leq 1$$

unabhängig von E!

$$\Rightarrow \boxed{Z(E) = \mathcal{C} V^N E^{3N/2}}$$



→ Entropie $S(E) = k \ln Z(E)$

$$S(E) = k \ln (\propto V^N E^{3N/2})$$

$$= k \ln \propto + kN \ln V + \frac{3}{2} kN \ln E$$

$$\rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{3}{2} \frac{Nk}{E}$$

$$\hookrightarrow \boxed{E = \frac{3}{2} NkT} \quad (\text{kalorische Zustandsgl.})$$

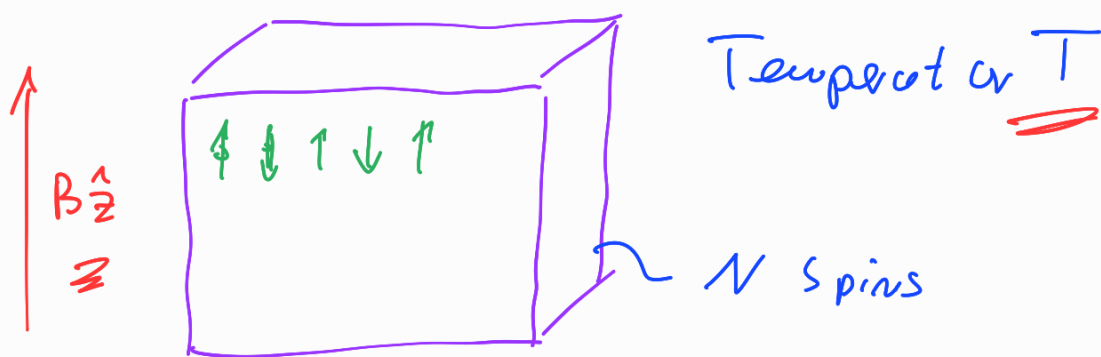
$$\hookrightarrow \frac{3}{2} kT = \frac{E}{N} = \frac{1}{N} \sum_i \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} = \overline{E_{\text{kin}}^{(1)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{E_{\text{kin}}^{(1)}} = \frac{3}{2} kT}$$

Wie elementare
Gas kinetik ebenfalls
zeigt (Exp. 1)



Beispiel 2: Paramagnet im Magnetfeld $\vec{B} = B \hat{z}$



$T, B \rightarrow$ Magnetisierung $m(B, T)$?
per Spin

dimensionslose Magnetisierung per Spin:

$$m := \frac{2}{\mu_0 B} \frac{M}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i \quad \left(E = \frac{\mu_0 B N \cdot m}{2} \right)$$

gesucht: $m(B, T) = ?$ $\left(\frac{E}{\mu_0 B N} = \frac{m}{2} \right)$

- qualitativ:
- B groß, T klein: $m \approx -1$
 - B klein, T groß: $|m| \ll 1$

empirische Curie-Gesetz:

$$m = -\chi \frac{B}{T}$$

- $\chi = ?$
- $|m| \approx 1$

gültig solange $|m| \ll 1$

$\rightarrow$ Stat. Phys.!

Zustandssumme: $Z(E) = \exp\left(N \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{E}{\mu_0 B N}\right)\right) !$

$$= \binom{N}{N_+(E)}$$

Entropie: $S(E) = k N \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{E}{\mu_0 B N}\right)$

$h(x)$: binäre Entropie $h(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$

$$h(x) = -\ln x + \ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) \quad (*)$$

inv. Temp:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = k \cancel{N} \cdot \frac{1}{\cancel{\mu_0 B N}} \ln'\left(\frac{1}{2} + \frac{E}{\mu_0 B N}\right)$$

" $\frac{m}{2}$

$$\frac{\mu_0 B}{kT} = \ln\left(\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{m}{2}} - 1}_{//}\right) = \ln\left(\frac{1-m}{1+m}\right)$$

(*)

$$\frac{2}{1+m} - 1 = \frac{1-m}{1+m}$$

$$\frac{1-m}{1+m} = e^{\mu_0 B / kT} =: q$$

$$\rightarrow 1-m = q + m q \rightarrow m = \frac{1-q}{1+q}$$

$$\frac{1-m}{1+m} = e^{\mu_0 B / kT} =: q$$

$$\rightarrow 1-m = q + m q \rightarrow m = \frac{1-q}{1+q}$$

$$\rightarrow m = \frac{q^{-1/2} - q^{1/2}}{q^{-1/2} + q^{1/2}} = \frac{e^{-\mu_0 B / 2kT} - e^{+\mu_0 B / 2kT}}{e^{-\mu_0 B / 2kT} + e^{+\mu_0 B / 2kT}}$$

$$\rightarrow m(B, T) = -\tanh\left(\frac{\mu_0 B}{2kT}\right)$$

