Wiederholung:

- **Vektor (in komp.)** $\longleftrightarrow$ **Dualvektor (in komp.)**

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \qquad \psi^+ = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_N^*)$$

$$\rightsquigarrow \quad \psi^+ \chi = \langle \psi, \chi \rangle$$

- **Dirac-Notation**

Vektor ψ $\longleftrightarrow$ $|\psi\rangle$: "ket ψ"

Dualvektor ψ^+ $\longleftrightarrow$ $\langle\psi|$: "Bra ψ"

$\rightsquigarrow$ $\psi^+\chi$ $\longleftrightarrow$ $\langle\psi|\chi\rangle$ $(\equiv \langle\psi,\chi\rangle)$

"Bracket"

- **Lineare Abb.** $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, $\varphi \mapsto A\varphi$: $A(\varphi + \psi) = A\varphi + A\psi$, $A(\lambda\varphi) = \lambda A \varphi$

Falls $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 \equiv \mathcal{H}$:

Lin. Abb. $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ $=$ **Operator A auf $\mathcal{H}$**

Operatoren im Dirac-Notation:

z.B.: $|\varphi\rangle, |\psi\rangle$ $\hookrightarrow$ $\langle\varphi|, \langle\psi|$ $\Big\}$ $\rightarrow$ $A := |\varphi\rangle\langle\psi|$

$B := |\psi\rangle\langle\varphi|$

$\ulcorner \rightarrow$ $A|\chi\rangle = |\varphi\rangle\langle\psi|\chi\rangle = \langle\psi|\chi\rangle \, |\varphi\rangle$

$B|\chi\rangle = |\psi\rangle\langle\varphi|\chi\rangle = \langle\varphi|\chi\rangle \, |\psi\rangle$ $\lrcorner$

• Op. D aus Aufgabe 5:

$$D = |x+\rangle\langle z+| - |x-\rangle\langle z-|$$

: $|z+\rangle \xmapsto{D} |x+\rangle$

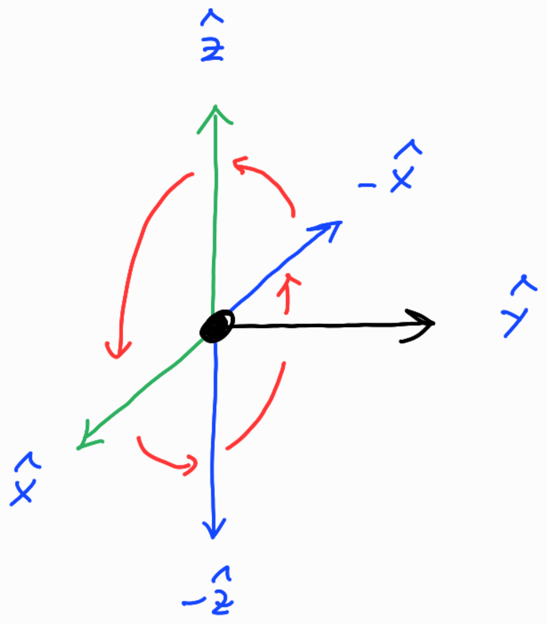
$|z-\rangle \longmapsto -|x-\rangle$

$|x+\rangle \longmapsto |z-\rangle$

$|x-\rangle \longmapsto |z+\rangle$

$|y+\rangle \longmapsto \frac{1-i}{\sqrt{2}} |y+\rangle$

$|y-\rangle \longmapsto \frac{1+i}{\sqrt{2}} |y-\rangle$



- allg. Operatoren in Dirac-Notation:

$\mathcal{H}$, ONB $B = \{ |\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_N\rangle \}$:

$$\rightsquigarrow \quad A = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|$$

Matrixelemente des Op. A

Matrix-Darstellung bzgl. Basis B:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & & \\ A_{31} & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \\ A_{N1} & & & & \end{pmatrix}.$$

$$|\psi\rangle \xmapsto{A} \underline{\underline{A|\psi\rangle}} = \sum_{i,j} A_{ij} \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|\underline{\underline{\psi\rangle}}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \xmapsto{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{A}}\psi = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_2 \end{pmatrix}$$

ONB: $|z+\rangle$, $|z-\rangle$

[Bsp.:

$$D = |x+\rangle\langle z+| \oplus |x-\rangle\langle z-| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|x-\rangle\langle z-| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |z-\rangle$$

$$D|y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \underbrace{\frac{1-i}{1+i}}_{=-i} \end{pmatrix} = \frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}|y-\rangle$$

]

Adjunktion: $\quad A \longleftrightarrow A^{+}$

Def.: $\quad \langle x_1, A x_2 \rangle \stackrel{!}{=} \langle A^{+} x_1, x_2 \rangle$

es gilt:

$$\boxed{\left(\lambda\, |\varphi\rangle\langle\psi|\right)^{+} \stackrel{!}{=} \lambda^{*}\, |\psi\rangle\langle\varphi|}$$

$$\rightarrow \quad A = \sum_{ij} A_{ij}\, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j| \quad \xrightarrow{\text{„}+\text{“}} \quad A^{+} = \sum_{ij} A_{ij}^{*}\, |\varphi_j\rangle\langle\varphi_i|$$

$$= \sum_{ij} A_{ji}^{*}\, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j| \,,$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{„}+\text{“}} \quad \underline{\underline{A}}^{+} = \begin{pmatrix} A_{11}^{*} & A_{21}^{*} & A_{31}^{*} \\ A_{12}^{*} & A_{22}^{*} & \\ A_{13}^{*} & & \end{pmatrix}$$

$$= \left(\underline{\underline{A}}^{T}\right)^{*}$$

Rechenregeln:

$$\boxed{\begin{aligned} (A+B)^{+} &= A^{+} + B^{+} \\ (\lambda A)^{+} &= \lambda^{*} A^{+} \\ (AB)^{+} &= B^{+} A^{+} \end{aligned}}$$

- Zerlegung der Eins : $\mathbb{1}_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
  $|\psi\rangle \mapsto |\psi\rangle$

ONB $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_N\rangle$:

$$\boxed{\mathbb{1}_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{N} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} \qquad (*)$$

Γ

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} |\varphi_\ell\rangle = \sum_{i=1}^{N} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\varphi_\ell\rangle = |\varphi_\ell\rangle$$

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} |\psi\rangle = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \Big(\sum_\ell a_\ell |\varphi_\ell\rangle\Big) = \sum_\ell a_\ell \underbrace{\mathbb{1}_{\mathcal{H}} |\varphi_\ell\rangle}_{= |\varphi_\ell\rangle} = |\psi\rangle$$

$\lrcorner$

- $$|\psi\rangle = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} |\psi\rangle \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{N} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\psi\rangle$$

- $$\underline{\underline{B}} \overset{!}{=} \mathbb{1}_{\mathcal{H}} B \,\mathbb{1}_{\mathcal{H}} = \Big(\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\Big) B \Big(\sum_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|\Big)$$

$$= \sum_{ij} \underline{\underline{|\varphi_i\rangle}} \, \langle\varphi_i|B|\varphi_j\rangle \, \underline{\underline{\langle\varphi_j|}}$$

$$= \sum_{ij} \underbrace{\langle\varphi_i|B|\varphi_j\rangle}_{= B_{ij}} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j| \quad !$$

Observablen und hermiteschen Operatoren

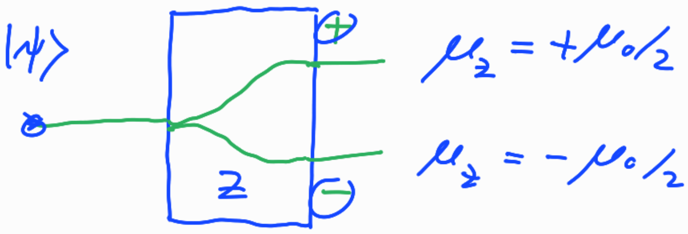
Observable = <u>ob</u>servier<u>bare</u> phys. Vari<u>able</u>

= <u>messbare</u> phys. Größe !

Stern-Gerlach-Versuch: z-Komp. des mag. Moments $= \mu_z$

x $\quad \mu_x$

y $\quad \mu_y$



$\mu_0/2$ und $-\mu_0/2$ sind <u>mögliche</u> Messwerte, werden mit Wkt. 1 gemessen in orthogonalen Zuständen $|z+\rangle$ bzw. $|z-\rangle$.

$|x+\rangle \quad |x-\rangle$

$|y+\rangle \quad |y-\rangle$

im allg. Zustand $|\psi\rangle$

wird $\pm\mu_0/2$ gemessen mit

Wkt. $\quad P_+ = |\langle z+|\psi\rangle|^2$

bzw. $\quad P_- = |\langle z-|\psi\rangle|^2$

allg. Observable A:

a) mögliche Messwerte $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$

b) mit orthogonalen $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots |\varphi_N\rangle$, in denen Messwerte jeweils mit Wkt. 1 vorliegen.

c) im Zustand $|\psi\rangle$ wird Messwert a_ℓ gemessen mit Wkt.

$$\boxed{p_\ell = |\langle\varphi_\ell|\psi\rangle|^2}$$ Bornsche Regel

d) falls Messung ideal, dann ist nach Messung von a_ℓ System im Zustand $|\varphi_\ell\rangle$.

$\rightarrow$ Erwartungswert der Observablen A wenn System im Zustand $|\psi\rangle$ ist:

Born'sche Regel(!)

$$\langle A\rangle_{|\psi\rangle} \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot a_i = \sum_{i=1}^{N} a_i \, |\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2$$

$$= \frac{1}{M}\sum_i H_i a_i = \sum_i \frac{H_i}{M} a_i$$

$$h_i \longrightarrow p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \langle\psi|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\psi\rangle$$

$$|\langle\psi|\varphi_i\rangle|^2 = \langle\psi|\varphi_i\rangle\langle\psi,\varphi_i\rangle = \langle\psi|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\underbrace{\left(\sum_i a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\right)}_{=:\hat{A}}|\psi\rangle \overset{!}{=} \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

$\Rightarrow$ zweckmäßig:

möglichen Messwerte

Operator

$$\boxed{\hat{A} := \sum_{i=1}^{N} a_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}$$

zur Observablen A

in Zuständen $|\varphi_i\rangle$ mit Wkt. 1.

→ Erwartungswert:

$$\boxed{\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}$$

Eigenschaften von $\hat{A}$:

$$\hat{A} |\varphi_\ell\rangle = \left(\sum_i a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \right) |\varphi_\ell\rangle$$

$$= \sum_i a_i |\varphi_i\rangle \underbrace{\langle\varphi_i|\varphi_\ell\rangle}_{= \delta_{i\ell}} = a_\ell |\varphi_\ell\rangle \, ,$$