Observable = observierbare Variable

$\hat{=}$ messbare Größe

Observable A :

- mögliche Messwerte

$$\boxed{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N \in \mathbb{R}}$$

- mit Wkt. 1 gemessen in orthogonalen Zust.

$$\boxed{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle, \ldots, |\varphi_N\rangle \in \mathcal{H}}$$

- Messwert a_i im Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ mit

Wkt. $\quad p_i = |\langle \varphi_i | \psi \rangle|^2 \quad (*)$

$\Rightarrow$ Erwartungswert von A im Zust. $|\psi\rangle$:

$$\langle A \rangle_{|\psi\rangle} \equiv \sum_{i=1}^{N} a_i \, p_i \overset{(*)}{=} \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

mit Operator $\boxed{\hat{A} = \sum_{i=1}^{N} a_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}$

Eigenschaften:

- $\hat{A}|\varphi_\ell\rangle = a_\ell |\varphi_\ell\rangle$

  - mögl. Messwert a_ℓ ist Eigenwert von $\hat{A}$
  - zugehöriger Zustand $|\varphi_\ell\rangle$ ist Eigenvektor von $\hat{A}$

- $$\hat{A}^\dagger = \sum_i \left(a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\right)^\dagger = \sum_i \underset{a_i}{\overset{\|}{a_i^*}} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \hat{A}$$

  d.h. $\hat{A}$ ist hermitesch!

Mathematik:

Ist A ein hermitescher Operator, so gibt es reelle Eigenwerte

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_N \in \mathbb{R}$$

zu orthogonalen Eigenvektoren

$$|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle, \dots, |\varphi_N\rangle$$

und somit $\boxed{A = \sum_{i=1}^{N} a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}$ (Spektraldarstellung) d.h. hermitescher Operator $\overset{!}{\longleftrightarrow}$ Observable

⇒ 2. Postulat (Observable, Messung)

Eine Observable A mit möglichen Mess-werten $a_1, a_2, \ldots, a_N$ und zugeh. orthogonalen Zuständen $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \ldots, |\varphi_N\rangle$ entspricht genau einem hermiteschen Operator $\hat{A}$ mit Eigenwerten $a_1, \ldots a_N$ und Eigenvektoren $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \ldots, |\varphi_N\rangle$ (und umgekehrt), d.h.

$$\boxed{\hat{A} = \sum_{i=1}^{N} a_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}$$

Eigenvektor ≡ Eigenzustand

Eigenwert ≡ möglicher Messwert

- Messung von A am System im Zustand $|\psi\rangle$ ergibt Messwert a_i mit Wkt.

$$\boxed{p_i = |\langle \varphi_i | \psi \rangle|^2}$$

$\Rightarrow$ Erwartungswert von A im Zust. $|\psi\rangle$:

$$\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

- bei idealer Messung ist nach Ergebnis a_i System im Zustand $|\varphi_i\rangle$

Beispiel:

Stern-Gerlach-Versuch:

Observablen: Komponenten des magn. Moments: μ_z, μ_x, μ_y

$\rightarrow$ μ_z: mögliche Messw. $+\mu_0/2, -\mu_0/2$

im Zust. $|z+\rangle, |z-\rangle$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_z = \frac{\mu_0}{2} |z+\rangle\langle z+| - \frac{\mu_0}{2} |z-\rangle\langle z-|$$

$|\psi_1\rangle = |z+\rangle$, $|\psi_2\rangle = |z-\rangle$, $|\psi_3\rangle = |x+\rangle$

$\rightarrow$ $\langle \mu_z \rangle_{|\psi_1\rangle}$, $\langle \mu_z \rangle_{|\psi_2\rangle}$, $\langle \mu_z \rangle_{|\psi_3\rangle}$?

$|\psi_1\rangle = |z+\rangle$, $\hat{\mu}_z = \underbrace{\frac{\mu_0}{2}|z+\rangle\langle z+| - \frac{\mu_0}{2}|z-\rangle\langle z-|}$

$\langle\psi_1| = \langle z+|$

$\langle\mu_z\rangle_{|\psi_1\rangle} = \langle\psi_1|\hat{\mu}_z|\psi_1\rangle$

$= \langle z+|\left(\frac{\mu_0}{2}|z+\rangle\langle z+| - \frac{\mu_0}{2}|z-\rangle\langle z-|\right)|z+\rangle$

$= \langle z+|\frac{\mu_0}{2}|z+\rangle\underbrace{\langle z+|z+\rangle}_{1} + \langle z+|\left(-\frac{\mu_0}{2}\right)|z-\rangle\underbrace{\langle z-|z+\rangle}_{0}$

$= \frac{\mu_0}{2}\underbrace{\langle z+|z+\rangle}_{=1} = \mu_0/2$!

analog

- $\langle\mu_z\rangle_{|z-\rangle} = \langle z-|\hat{\mu}_z|z-\rangle = \dots = -\mu_0/2$

- $\langle\mu_z\rangle_{|x+\rangle}$: $|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z+\rangle + |z-\rangle\right)$

$\langle x+| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle z+| + \langle z-|\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\langle z+| + \langle z-|\right)\left(+\frac{\mu_0}{2}|z+\rangle\langle z+| - \frac{\mu_0}{2}|z-\rangle\langle z-|\right)\left(|z+\rangle + |z-\rangle\right)$

$= 0$!

mit Matrizen:

$$\hat{\mu}_z = \frac{\mu_0}{2}\underbrace{|z+\rangle\langle z+|}_{=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1,0) = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}} - \frac{\mu_0}{2}\underbrace{|z-\rangle\langle z-|}_{=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0,1) = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\hat{\mu}_z = \frac{\mu_0}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}$$

$$\langle\hat{\mu}_z\rangle_{|x+\rangle} = \frac{\mu_0}{2}\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}\right\rangle$$

$$= \frac{\mu_0}{4}\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$