Letzte Woche:

$$\boxed{\underline{\text{Observable}} \mathrel{\hat{=}} \underline{\text{hermitescher Operator}}}$$

$$A = \sum_{i=1}^{N} a_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

mögliche Messwerte

Eigenzustände

- a_i gemessen mit Wkt. $\boxed{p_i = |\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2}$

→ Erwartungswert $\boxed{\langle A\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|A|\psi\rangle}$

heute: q.m. Dynamik (3. Postulat)

Zeitentwicklung eines q.m. Zustands?

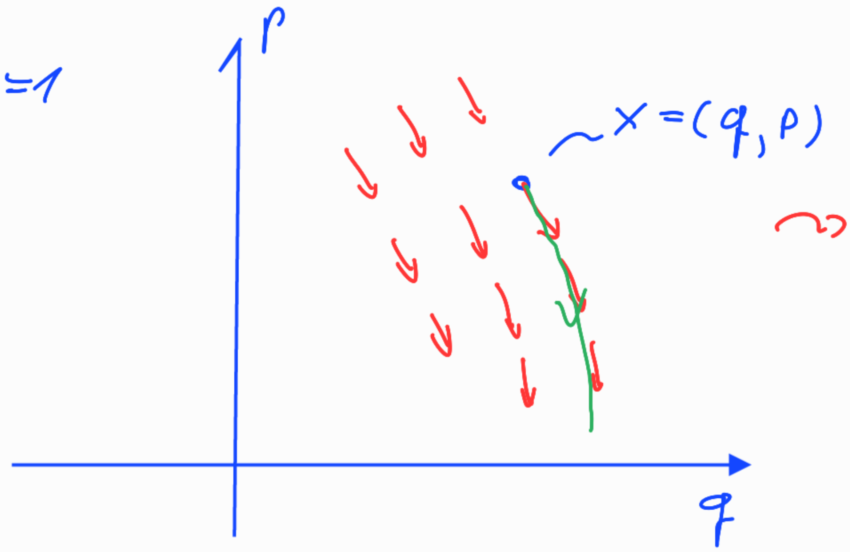
$$\psi(0) \xrightarrow{t} \psi(t)$$

⌜ Erinnerung: klassische Mechanik,

abgeschlossenes, konservatives System

im Hamiltonschen Formulierung:

$D=1$



⇝ zeitliche Zustandsänderung:

$$\boxed{\dot X(t) \overset{!}{=} V_H(X(t))}$$

Hamilton-Funktion: $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

$$V_H(X) = \left(\frac{\partial H}{\partial p},\ -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

$$\frac{p}{m} = \dot q \qquad -V'(q) \overset{!}{=} F(q) \quad !$$

q.m. Dynamik

Zustand $\hat{=}\ \psi \in \mathcal{H}$

⇝ $\dot\psi(t) \overset{!}{=} f(\psi(t))$

3. Postulat: f ist lineare Abb. !

⟶

d.h. $\dot{\psi}(t) \overset{!}{=} F\,\psi(t) \quad (*)$

Für alle Zeiten: $\boxed{|\psi(t)|^2 = 1}$!

$\rightsquigarrow$ Anforderung an Op. der Zeitentwicklung F!

Für alle t: $\quad 1 \overset{!}{=} |\psi(t)|^2 \qquad (\psi = \psi(t))$

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dt}|\psi|^2 = \frac{d}{dt}\langle\psi,\psi\rangle$$

$$= \langle\dot{\psi},\psi\rangle + \langle\psi,\dot{\psi}\rangle$$

$$\overset{(*)}{=} \langle F\psi,\psi\rangle + \langle\psi,F\psi\rangle$$

$$= \langle\psi,F^+\psi\rangle + \langle\psi,F\psi\rangle$$

$$= \langle\psi,(F^+ + F)\psi\rangle \overset{!}{=} 0$$

$\rightsquigarrow \quad F^+ + F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{F^+ = -F} \quad (**)$

(d.h. F "anti-hermitesch")

zweckmäßig: $\quad F := -iH \quad \rightsquigarrow \quad F^+ = i H^+ \overset{(**)}{=} iH = -F$

$\rightsquigarrow$ $(**)$ gleichbedeutend zu $\boxed{H = H^+}$

→ Operator H hermitesch = Observable!

Dynamik:

$$\boxed{\dot{\psi}(t) = -i H \psi(t)}$$

wobei H hermitescher Operator

"Schrödinger-Gleichung"

$$\left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -i H |\psi(t)\rangle \right)$$

- H "Erzeuger der Zeitentwicklung"
- H hermit. Operator $\hat{=}$ Observable

⌈ Bemerkung: warum nicht nicht-lineare Zeitentwicklung: z.B.:

$$\dot{\psi}(t) = -i H(|\psi(t)|^2)\, \psi(t)$$

"nicht-lineare Schrödingergleichung"

: Simon, Bužek, Gisin: ↳ verletzt SRT! ⌋

physikalische Bedeutung der Obser. H?

betrachte zeitliche Änderung von Erwartungs-
werten!

<u>zeitabhängiger Erwartungswert</u> einer Obs. A:

$$\langle A\rangle_t := \langle A\rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t), A\psi(t)\rangle$$

↳ Lösung der S.Gl.:

$$\boxed{\dot\psi(t) = -iH\psi(t)}$$

→ zeitl. Änderung: $\psi(t) \equiv \psi$

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_t = \frac{d}{dt}\langle \psi, A\psi\rangle = \langle\dot\psi, A\psi\rangle + \langle\psi, A\dot\psi\rangle$$

$$= \langle -iH\psi, A\psi\rangle + \langle\psi, A(-iH)\psi\rangle$$

$$\underset{H = H^+}{=} \langle\psi, iHA\psi\rangle + \langle\psi, -iAH\psi\rangle$$

$$= \langle\psi, i(HA-AH)\psi\rangle$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle A\rangle_t = \langle\psi, i(HA-AH)\psi\rangle}$$

⚠ i.A. $AB \neq BA$ (Aufgabe 8!)

Def. • Kommutator zweier Op.en A und B

$$[A, B] := AB - BA$$

• A und B kommutieren

$$:\Longleftrightarrow \quad [A,B] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad AB = BA$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)} = \langle i[H,A]\rangle_{\psi(t)}}$$

Def.: Obs. A is Erhaltungsgröße

$$:\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)} = 0$$ (für alle Lösungen $\psi(t)$ der S.Gl.: $\dot{\psi} = -iH\psi$

$$\Longleftrightarrow \quad \langle i[H,A]\rangle_{\psi} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für } \psi \in \mathcal{H}$$

$$\Longleftrightarrow \quad [H, A] = 0$$

Satz: A Erhaltungsgröße $\Longleftrightarrow [H,A] = 0$

es gilt immer: $\underline{\underline{0 \stackrel{!}{=} [H,H]}} = HH - HH$

→ nur Energie ist in jedem System (abgeschl., konservativ) Erhaltungsgröße!

→ Operator $H \stackrel{!}{=}$ Observable Energie!

bis auf Faktor λ geeigneter Dimension:

$$\underset{=}{\lambda} \quad \text{Dimension} = \text{Zeit} \times \text{Energie} = \underline{\text{Wirkung}}$$

→ $$\dot{\psi}(t) = -i \frac{H}{\lambda} \psi(t)$$

→ numerische Übereinstimmung mit "Energie" der klass. Mechanik erzielt mit

$$\lambda = \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}04\ldots \cdot 10^{-34}\,\text{Js}$$

3. Postulat

Die zeitliche Entwicklung eines q.m. Zustands genügt der Schrödinger-Gl.

$$\boxed{\dot{\psi}(t) = -i \frac{H}{\hbar} \psi(t)}$$

wobei H der Energie-Operator ist.

(Hamilton-Operator = Hamiltonian)

Lösungen $\psi(t)$?

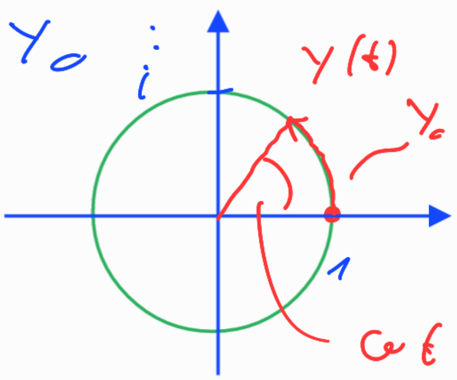
↳ der S.G. : $\boxed{\dot{\psi} = i W \psi}$ → $\psi(t)$

$$W = -H/\hbar$$

Γ ähnlich : $\boxed{\dot{y} = i\omega y}$ $\quad y(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$

Lsg $y(t)$ zum AW $y(0) = y_0$:

$$y(t) = e^{i\omega t} y_0 \quad !$$



→ $\psi(t)$ Lösung der S.GL zum Anfangszustand ψ_0 :

$$\psi(t) \overset{!}{=} e^{iWt}\psi_0 = e^{-iHt/\hbar}\psi_0$$

⌈ vgl. Aufgabe 9:

$$e^A \equiv \exp A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

$$A = \sum a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \rightsquigarrow e^A = \exp A = \sum_i e^{a_i} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

$$\rightsquigarrow \boxed{H = \sum_{i=0}^{N} E_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|} \qquad (N \to \infty)$$

Eigenenergien: $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \dots$

Energieeigenzustände: $|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle, \dots$

$$\exp(-iHt/\hbar) = e^{-iHt/\hbar}$$

$$= \sum_{l=0}^{N} e^{-iE_l t/\hbar} |\varphi_l\rangle\langle\varphi_l|$$

$$= \sum_{l=0}^{N} e^{-i\omega_l t} |\varphi_l\rangle\langle\varphi_l|$$

$$\omega_l := E_l/\hbar$$