

Wiederholung:

Schrodinger-Gleichung:

$$i\hbar |\dot{\psi}\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$

$$\rightarrow |\psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-i\hat{H}t/\hbar}}_{\substack{\text{"} \\ \mathcal{U}(t)}} |\psi(0)\rangle = \sum_n \underbrace{e^{-iE_n t/\hbar}}_{\substack{\mathcal{U}(t) \text{ (Energieeigenzustand)}}} |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n | \psi(0)\rangle$$

"Zeitentwicklungsoperator"

$$(\hat{H} |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle)$$

- Energieeigenzustände sind stationär
- Superposition zweier Energieeigenzustände führt zu Oszillation der Erwartungswerte mit

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar}$$

("Beutenschwabbung")

Energieeigenzust. $|\varphi_h\rangle, |\varphi_e\rangle$

zu Eigenenergien $E_h, E_e (> E_h)$:

Superposition: $e^{-iE_h t/\hbar} \quad e^{-iE_e t/\hbar}$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_h\rangle + |\varphi_e\rangle)$$

$$\hookrightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-iE_h t/\hbar} |\varphi_h\rangle + e^{-iE_e t/\hbar} |\varphi_e\rangle \right)$$

bel. Observable A :

$$\langle A \rangle_t = \langle A \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} (\langle \varphi_h | A | \varphi_h \rangle + \langle \varphi_e | A | \varphi_e \rangle)$$

$$+ \frac{1}{2} e^{+i(E_h - E_e)t/\hbar} \langle \varphi_h | A | \varphi_e \rangle$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-i(E_h - E_e)t/\hbar} \langle \varphi_e | A | \varphi_h \rangle$$

$A = A^\dagger$

$$\Gamma \langle \varphi_h | A | \varphi_e \rangle^* = \langle \varphi_e | A^\dagger | \varphi_h \rangle = \langle \varphi_e | A | \varphi_h \rangle$$

$$\text{d.h. } \langle A \rangle_t = \frac{1}{2} \langle \varphi_h | A | \varphi_h \rangle + \frac{1}{2} \langle \varphi_e | A | \varphi_e \rangle$$

$$+ \operatorname{Re} e^{i(E_h - E_e)t/\hbar} \langle \varphi_h | A | \varphi_e \rangle$$

$$z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$$

$$\text{d.l. } \langle A \rangle_t = \frac{1}{2} \langle \varphi_g | A | \varphi_g \rangle + \frac{1}{2} \langle \varphi_e | A | \varphi_e \rangle \\ + \operatorname{Re} e^{\frac{i(E_g - E_e)t}{\hbar}} \langle \varphi_g | A | \varphi_e \rangle$$

$$z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$$

$$\langle \varphi_g | A | \varphi_g \rangle = A_{gg} \in \mathbb{R}$$

$$\langle \varphi_e | A | \varphi_e \rangle = A_{ee} \in \mathbb{R}$$

$$\langle \varphi_g | A | \varphi_e \rangle = A_{ge} = e^{i\vartheta} |A_{ge}|$$

$$\omega := (E_g - E_e) / \hbar$$

$$\rightarrow \langle A \rangle_t = \frac{A_{gg} + A_{ee}}{2} + \operatorname{Re} e^{i(\omega t + \vartheta)} |A_{ge}|$$

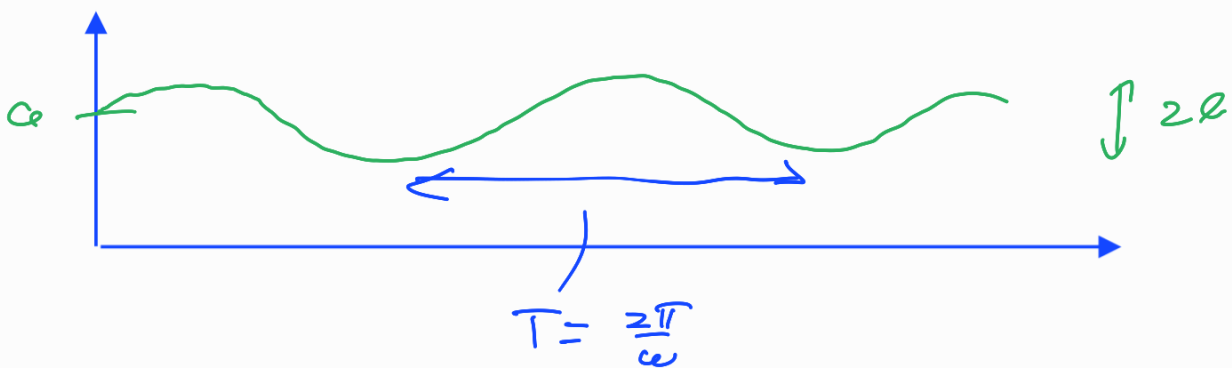
d. h.:

$$\langle A \rangle_t = a + b \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{1}{2} (A_{ee} + A_{ee})$$

$$b = |A_{ee}|, \quad \varphi = \arg(A_{ee})$$

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{E_a - E_e}{\hbar}$$



Beispiel:

$$|\vec{\mu}| = \mu_0/2$$

1) Larmorpneigression: $\vec{B} = B \hat{z}$

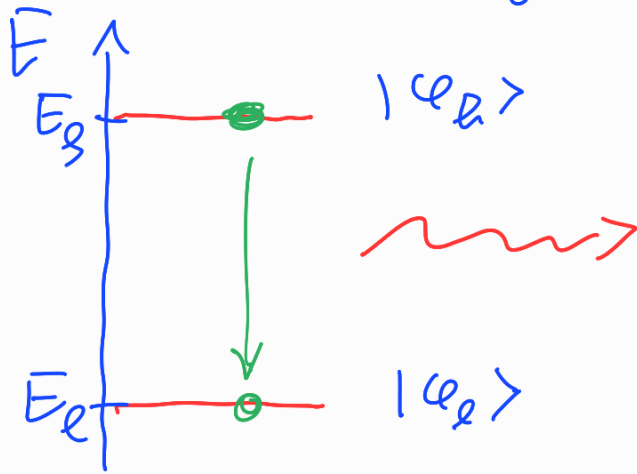
$$|z+\rangle \rightarrow E_+ = +\frac{\mu_0}{2} B$$

$$|z-\rangle \rightarrow E_- = -\frac{\mu_0}{2} B$$

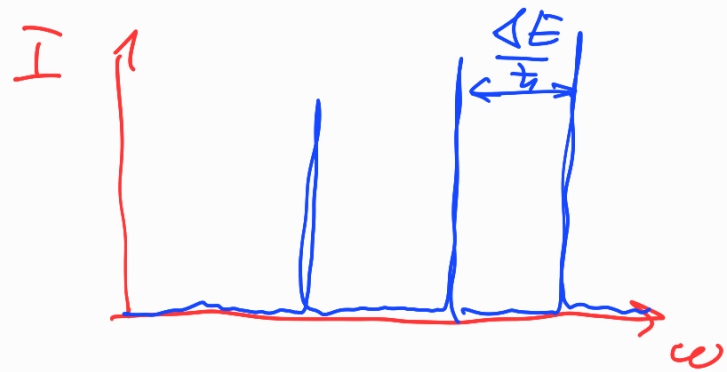
$$\omega = \frac{E_+ - E_-}{\hbar} = \frac{\mu_0 B}{\hbar}$$

↑
Larmorfrequenz

2) Niveaüübergang in Atom:



$$\omega = \frac{E_g - E_e}{\hbar}$$



Lichtemission = Emission einer el.-mag. Welle:

el. Dipolmoment $\vec{d}(t) = d_z(t) \hat{z}$.

Observable: $\langle d_z \rangle_t = d_0 + \cos(\omega t) d_1$

während Übergang $\hbar\omega_{cm}$ in

Superposition von $|\psi_g\rangle$ und $|\psi_e\rangle$

→ "Quantischiebung" mit $\omega = \frac{E_g - E_e}{\hbar}$!

3) Atomuhr

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \underline{\underline{10^{-16}}} !$$

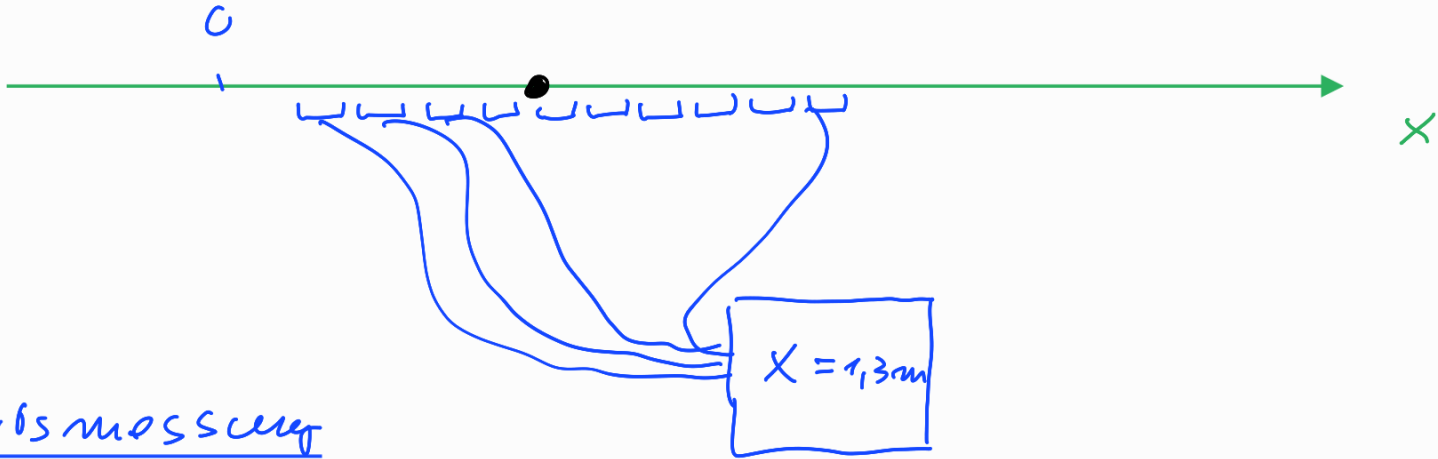
Atomkern

(Thorium)

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \underline{\underline{10^{-19}}} !$$

Quantenmechanik des Punktteilchens

(1D)



Obmessung

→ Teilchenort: Koordinate x

Idealisierung: kontinuierliche Messwerte $x \in \mathbb{R}$

Ortsobservable X $\hat{=}$ herm. Operator X
mit Kontinuum an
Eigenwerten

$$x \in \mathbb{R}$$

→ Eigenzustände $|\varphi_x\rangle$

$$x \in \mathbb{R} !$$

↳ bisher:

• diskrete EWe $e_1, e_2, \dots,$

• orthogonale EZe $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots$]

Kontinuität der Eigenwerte erfordert

Modifikation des Formalismus!

diskret

Ewe $a_1, a_2, \dots$

Eze $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots$

$B = \{ |\varphi_i\rangle \}_{i=1,2,\dots}$
 $\uparrow$
 ONB

Kontinuierlich

Ewe $x \in \mathbb{R}$

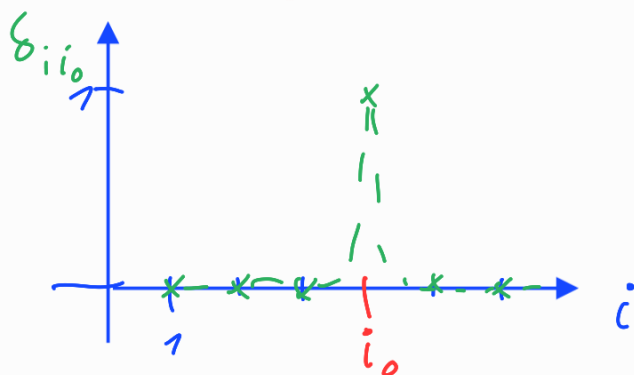
Eze: $B = \{ |\varphi_x\rangle \}_{x \in \mathbb{R}}$

$\uparrow$ ONB !?

Orthogonalität

Dirac-Deltafunktion

$$\langle \varphi_i | \varphi_{\underline{i}_0} \rangle = \delta_{i \underline{i}_0}$$

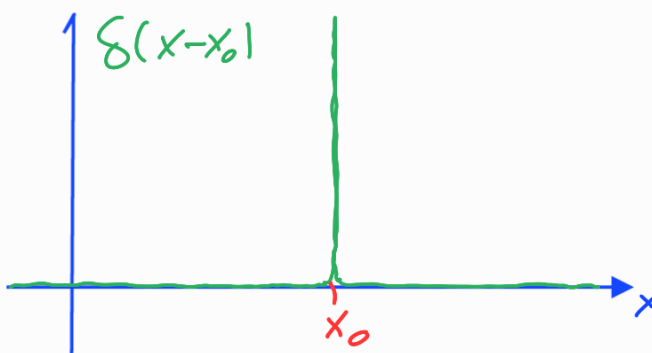


- $\delta_{i \underline{i}_0} = 0$ für $i \neq \underline{i}_0$

- $\sum_i \delta_{i \underline{i}_0} = 1$

- $\sum_i a_i \delta_{i \underline{i}_0} = a_{\underline{i}_0}$

$$\langle \varphi_x | \varphi_{\underline{x}_0} \rangle = \delta(x - \underline{x}_0) \equiv \delta_{\underline{x}_0}(x)$$



definierende Eigenschaften

- $\delta(x - x_0) = 0$ für $x \neq x_0$

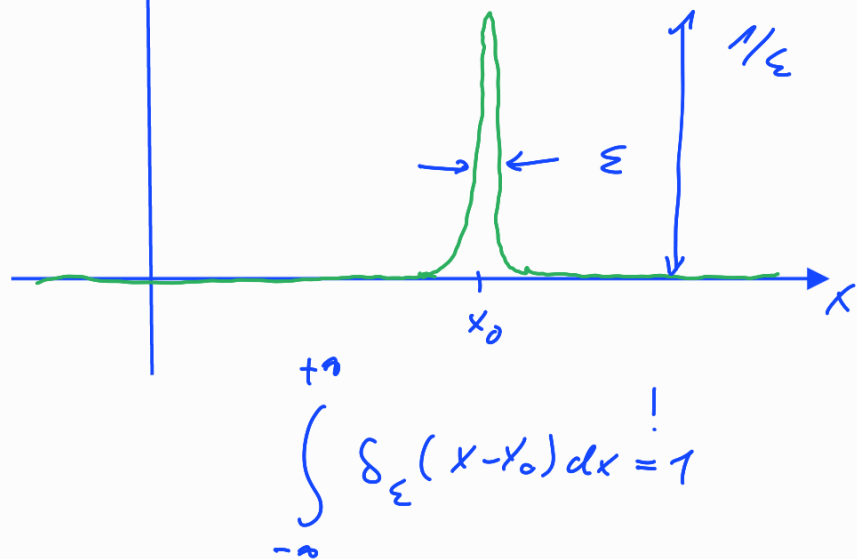
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) = 1$

- $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$

└ ε -Deltafunktion: $\delta_\varepsilon(x-x_0)$

$$\delta_\varepsilon(x-x_0) :$$

$$\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0$$



$$\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x-x_0) = \delta(x-x_0) \right)$$

Bsp:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} \delta(x - \frac{\pi}{2}) dx = \frac{\sin \pi/2}{(\pi/2)^3} = \frac{8}{\pi^3}$$

Vollständigkeit heißt

$$B = \{|\varphi_i\rangle\}_{i \in \mathbb{N}}$$

Vollständigkeit

$$B = \{|\varphi_x\rangle\}_{x \in \mathbb{R}}$$

diskret:

$$\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \mathbb{1}$$

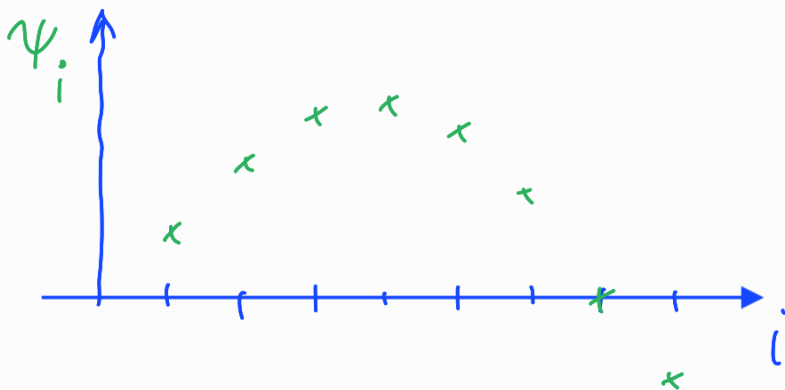
$$\hookrightarrow |\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle$$

$$= \sum_i |\varphi_i\rangle \underbrace{\langle\varphi_i|\psi\rangle}_{\psi_i}$$

i -te Komponente von $|\psi\rangle$
bzgl. B :

$$\bullet \psi_i = \langle\varphi_i|\psi\rangle$$

$$\bullet |\psi\rangle = \sum_i \psi_i |\varphi_i\rangle$$



kontinuierlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\varphi_x\rangle\langle\varphi_x| = \mathbb{1}$$

$$\hookrightarrow |\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle$$

$$= \int dx |\varphi_x\rangle \underbrace{\langle\varphi_x|\psi\rangle}_{\psi(x)}$$

x -Komp. von $|\psi\rangle$ bzgl. B

$$\bullet \boxed{\psi(x) = \langle\varphi_x|\psi\rangle}$$

$$\bullet |\psi\rangle = \int dx \psi(x) |\varphi_x\rangle$$

$\psi(x)$ = Wellenfunktion
des Zustands $|\psi\rangle$

