Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II – Blatt 3

Sommersemester 2026

Webpage: `https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tpII_26.html/`
Abgabe: bis **Montag, 04.05.26, 23:55** elektronisch per *slack* (link auf obiger Webpage).

9. Zur Diskussion

0 Punkte

a) Auf welche Weise wird in der Quantenmechanik eine Observable durch einen hermiteschen Operator beschrieben?

b) Weshalb ist der Erwartungswert einer Observablen A im Zustand $|\psi\rangle$ durch $\langle\psi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle$ gegeben?

c) Wie lautet die Schrödingergleichung?

d) Wie berechnet man $\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)}$?

e) Wie kann man überprüfen, ob eine Observable A eine Erhaltungsgröße eines Systems ist?

f) Warum ist die Energie immer eine Erhaltungsgröße?

10. Operatoren

3+3+2+2=10 Punkte

Die orthogonalen Zuständen $|\varphi_1\rangle\,, |\varphi_2\rangle\,, \ldots, |\varphi_N\rangle$ seien eine ONB eines Zustandraums $\mathcal{H}$. Ein Operator A auf $\mathcal{H}$ sei gegeben durch

$$A \;=\; \sum_{i=1}^{N} a_i\,|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\,, \qquad a_i \in \mathbb{C}\,.$$

a) Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von A? Ist A hermitesch?

b) Zeigen Sie, dass

$$A^2 \;=\; \sum_{i=1}^{N} a_i^2\,|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\,,$$

und allgemeiner für $n \in \mathbb{N}$

$$A^n \;=\; \sum_{i=1}^{N} a_i^n\,|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\,.$$

c) Die Exponentialfunktion für Operatoren ist definiert durch

$$\exp(B) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n\,.$$

Zeigen Sie, dass für den hier betrachteten Operator A

$$\exp(A) \;=\; \sum_{i=1}^{N} e^{a_i}\,|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\,.$$

Was sind demnach die Eigenwerte und -vektoren von $\exp(A)$?

d) Zeigen Sie explizit, dass

$$\exp(A)\exp(-A) = \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \,.$$

11. Pauli-Operatoren

4+4+2+4=14 Punkte

Die Operatoren $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$ und $\hat{\mu}_z$ aus Aufgabe 7 (Blatt 2) können durch *Pauli-Operatoren*

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= |x+\rangle\langle x+| \;-\; |x-\rangle\langle x-| \\
\sigma_2 &= |y+\rangle\langle y+| \;-\; |y-\rangle\langle y-| \\
\sigma_3 &= |z+\rangle\langle z+| \;-\; |z-\rangle\langle z-|
\end{aligned}$$

gemäß

$$\hat{\mu}_x = \mu_0\sigma_1, \quad \hat{\mu}_y = \mu_0\sigma_2, \quad \hat{\mu}_z = \mu_0\sigma_3,$$

dargestellt werden.

a) Stellen Sie die Pauli-Operatoren σ_1, σ_2, σ_3 durch Matrizen bzgl. der Orthonormalbasis $(|z+\rangle\,, |z-\rangle)$ dar.

b) Zeigen Sie, dass

$$\sigma_l^2 = \mathbf{1}_2, \quad [\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2 \,.$$

c) Sind die Pauli-Operatoren hermitesch?

d) Zeigen Sie folgende verallgemeinerte Euler-Formel:

$$\exp(i\sigma_l\varphi) \;=\; \cos(\varphi)\mathbf{1}_2 \;+\; i\sin(\varphi)\sigma_l \qquad\qquad (\varphi \in \mathbb{R}) \,.$$

12. Wiederholung: lineare, homogene DGL

5 Punkte

Zeigen Sie, dass

$$y(t) = e^{i\omega t}y_0$$

Lösung der DGL

$$\dot{y} = i\omega y, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

zum Anfangswert $y(0) = y_0$ ist. Skizzieren Sie Real- und Imaginärteil von $y(t)$ für $y_0 = 1$ und $\omega = 1$ als Funktion der Zeit $t \in [0, 2\pi]$.