Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik II – Blatt 5

Sommersemester 2026

Webpage: `https://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tpII_26.html/`
Abgabe: bis **Montag, 18.05.26, 23:55** elektronisch per *slack* (link auf obiger Webpage).

16. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Zustandsvektor $|\psi\rangle$ und der Wellenfunktion $\psi(x)$?

b) Was ist $\langle\varphi_x|\varphi_{x'}\rangle$ und was $\langle\varphi_x|\hat{x}|\varphi_{x'}\rangle$?

c) Wie lautet der Impulsoperator in Ortsdarstellung?

d) Welche Beziehung gibt es zwischen Translationen $T(s)$ und dem Impuls $\hat{p}$?

e) Was ist $[\hat{x}, \hat{p}]$?

f) Wie lautet die Wellenfunktion eines Impulseigenzustands zum Impuls $p = \hbar k$?

17. Ort- und Impulserwartungswerte *6 Punkte*

Bestimmen Sie die Erwartungswerte von Ort und Impuls eines Teilchens (1D) im Zustand $|\psi\rangle$ mit Wellenfunktion

$$\psi(x) = c\, e^{ik_0 x}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} .$$

k_0, x_0 und σ sind positive Konstanten geeigneter Dimension. Die Normierungskonstante ist
$c = (2\pi\sigma^2)^{-1/4}$.

18. Nützliche Kommutatorrelationen *1+2+2+5=10 Punkte*

a) Zeigen Sie für beliebige Operatoren A, B und C:

$$[A, BC] \;=\; B[A, C] + [A, B]C \,.$$

b) Der Kommutator der Operatoren A und B sei bis auf einen Faktor $c \in \mathbb{C}$ der Einheitsoperator: $[A, B] = c\mathbf{1}$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall für $n \in \mathbb{N}$

$$[A, B^n] = c\, n B^{n-1} \,.$$

c) $f(x)$ sei eine analytische Funktion, A und B seien Operatoren mit Kommutator wie in **b)**. Zeigen Sie:

$$[A, f(B)] = c\, f'(B) \,.$$

d) Bestimmen Sie nun unter Verwendung der vorangegangenen Aufgabenteile folgende Kommutatoren:

$$[\hat{x}, \hat{p}^2], \qquad [\hat{p}, \hat{x}^3], \qquad [\hat{p}, \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}], \qquad [\hat{x}, \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}s\hat{p}}], \qquad [\hat{p}, \mathrm{e}^{ik\hat{x}}].$$

Hierbei sind a, s und k reelle Konstanten geeigneter Dimensionen.

19. Zeitabhängige Erwartungswerte *10 Punkte*

Die Dynamik eines Teilchens (1D) der Masse m sei durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{x})$$

gegeben. Hierbei ist das *Potenzial* $V(x)$ eine relle, analytische Funktion. $|\psi(t)\rangle$ sei der gemäß dieser Dynamik zeitentwickelte Zustand des Teilchens. Im Folgenden betrachten wir die zeitabhängigen Erwartungswerte von Ort und Impuls,

$$\langle\hat{x}\rangle_t = \langle\psi(t)|\,\hat{x}\,|\psi(t)\rangle, \qquad \langle\hat{p}\rangle_t = \langle\psi(t)|\,\hat{p}\,|\psi(t)\rangle. \tag{1}$$

Zeigen Sie unter Verwendung von $\frac{d}{dt}\langle A\rangle_t = \langle\frac{i}{\hbar}[H, \hat{A}]\rangle_t$ (vgl. Vrlsg.) und den Ergebnissen aus Aufgabe **18.** folgende Relationen:

$$m\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle_t = \langle\hat{p}\rangle_t, \qquad \frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle_t = \langle F(\hat{x})\rangle_t,$$

wobei $F(x) = -V'(x)$. Kann man aufgrund dieser Beziehungen die quantenmechanische Dynamik auf die klassische Mechanik zurückführen?