Lösungshinweise Blatt 3

10 a) $$A|\varphi_\ell\rangle = \sum_i a_i\, |\varphi_i\rangle \underbrace{\langle\varphi_i|\varphi_\ell\rangle}_{=\delta_{i\ell}} = a_\ell\, |\varphi_\ell\rangle$$

d.h. $|\varphi_\ell\rangle$ ist EV zum EW a_i ;

$$A^\dagger = \sum_i \left(a_i\, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \right)^\dagger = \sum_i a_i^*\, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

$\rightsquigarrow$ A hermitesch g.d.w. alle a_i reell.

10 b) $$A^2 = \left(\sum_i a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\right)\left(\sum_j a_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|\right)$$

$$= \sum_{i,j} a_i a_j\, |\varphi_i\rangle \underbrace{\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle}_{=\delta_{ij}} \langle\varphi_j| = \sum_i a_i^2\, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| ;$$

per Induktion über n:

$$A^n = A A^{n-1} = \left(\sum_i a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\right)\left(\sum_j a_j^{n-1} |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|\right)$$

$$= \sum_i a_i a_j^{n-1}\, |\varphi_i\rangle \underbrace{\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle}_{\delta_{ij}} \langle\varphi_j| = \sum_i a_i^n\, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

10c) $$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \overset{b)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_i a_i^n\, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| =$$

$$= \sum_i \underbrace{\sum_n \frac{1}{n!} a_i^n}_{= e^{a_i}} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \quad = \sum_i e^{a_i} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

$\rightsquigarrow$ $|\varphi_i\rangle$ ist EV zum EW e^{a_i}

10 d)

$$\exp(A)\,\underbrace{\exp(-A)}_{\sum_j (-a_j)|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|} \overset{c)}{=} \left(\sum_i e^{a_i} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\right)\left(\sum_j e^{-a_j} |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|\right)$$

$$= \sum_{ij} e^{a_i - a_j} |\varphi_i\rangle\underbrace{\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle}_{\delta_{ij}}\langle\varphi_j| = \underbrace{\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}_{= \mathbb{1}_{\mathcal{H}}} .$$

11 a) Im folgenden $|\pm\rangle \equiv |z\pm\rangle$.

nach Aufgabe 7a ist

$$\sigma_1 = |-\rangle\langle+| + |+\rangle\langle-| \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = i\left(|-\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-|\right) \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

11 b)

$$\sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

$$\sigma_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

$$\sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2 .$$

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i\,\sigma_3 .$$

$$[\sigma_2, \sigma_3] = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2i\,\sigma_1$$

$$[\sigma_3, \sigma_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 2i\,\sigma_2$$

11c) Die definierenden Gleichungen der σ_e in der Aufgabenstellung sind offenbar Spektraldarstellungen mit <u>reellen</u> Koeffizienten $\rightarrow$ die Pauli-Operatoren sind hermitesch.

<u>alternativ</u> :

$$\sigma_1^+ = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T\right)^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1$$

$$\sigma_2^+ = \left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^T\right)^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2$$

$$\sigma_3^+ = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3 \quad .$$

11 d) Mit $\sigma_\ell^0 = \mathbb{1}_2$ (per def) und

$\sigma_\ell^2 = \mathbb{1}_2$ (nach 11 b) folgt

$$\sigma_\ell^n = \begin{cases} \sigma_\ell & : n \text{ ungerade} \\ \mathbb{1}_2 & : n \text{ gerade} \end{cases} \qquad (*)$$

$$\rightarrow \exp(i\sigma_\ell \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\sigma_\ell \varphi)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (i\sigma_\ell \varphi)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (i\sigma_\ell \varphi)^{2k+1}$$

$$\overset{(*)}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \varphi^{2k}}_{\hat{=} \cos\varphi} \cdot \mathbb{1}_2 + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \varphi^{2k+1}}_{\hat{=} \sin\varphi} \sigma_\ell$$

$$= \cos\varphi \cdot \mathbb{1}_2 + i \sin\varphi \, \sigma_\ell \quad .$$

12.

- $\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{i\omega t} y_0\right) = i\omega\, e^{i\omega t} y_0 = i\omega\, y(t)$ ✓

- $y(0) = e^{i\omega \cdot 0} y_0 = y_0$ ✓

→ $y(t)$ Lsg. der DGL $\dot{y} = i\omega y$ zum AW $y(0) = y_0$.

Für $y_0 = 1$ und $\omega = 1$ ist

$$y(t) = e^{it} = \underbrace{\cos t}_{\mathrm{Re}\, y(t)} + i\, \underbrace{\sin t}_{\mathrm{Im}\, y(t)}$$