Lösungshinweise Blatt 4

14)
$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iEt/\hbar} |\varphi\rangle + e^{-iE't/\hbar} |\varphi'\rangle \right)$$

$$\rightarrow \langle A\rangle_t = \frac{1}{2}\left(e^{iEt/\hbar} \langle\varphi| + e^{iE't/\hbar} \langle\varphi'| \right) \cdot A \cdot$$
$$\cdot \left(e^{-iEt/\hbar} |\varphi\rangle + e^{-iE't/\hbar} |\varphi'\rangle \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle A\rangle_{|\varphi\rangle} + \langle A\rangle_{|\varphi'\rangle} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big(\underbrace{e^{i(E-E')t/\hbar}\langle\varphi|A|\varphi'\rangle}_{*} + \underbrace{e^{-i(E-E')t/\hbar}\langle\varphi'|A|\varphi\rangle}_{\text{komplex konjugiert zu } *} \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle A\rangle_{\varphi} + \langle A\rangle_{\varphi'} \right) + \mathrm{Re}\, e^{i\omega t} \langle \varphi | A \varphi' \rangle$$

mit $a = \frac{1}{2}\left(\langle A\rangle_{\varphi} + \langle A\rangle_{\varphi'} \right)$, $\quad e^{-i\vartheta} \underset{\in \mathbb{R}_+}{b} = \langle \varphi | A | \varphi' \rangle$

also $\langle A\rangle_t = a + b \cos(\omega t - \vartheta)$.

Falls $|\psi_0\rangle = |\varphi\rangle$ folgt $\langle A\rangle_t = \cancel{e^{+iEt/\hbar}} \langle\varphi| A \,\cancel{e^{-iEt/\hbar}}\, |\varphi\rangle$

$= \langle A\rangle_{|\varphi\rangle}$, d.h. $\langle A\rangle_t$ <u>konstant</u>.

15) $H = \mu_0 B \left(|x-\rangle\langle x-| \; - \; |x+\rangle\langle x+| \right)$

$$|\psi_0\rangle = |z+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|x-\rangle + |x+\rangle \right)$$

$$\rightarrow \; |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i\mu_0 B t}{\hbar}} |x-\rangle + e^{\frac{i\mu_0 B t}{\hbar}} |x+\rangle \right)$$

mit $\omega = B\mu_0 / \hbar$ also

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega t} |x-\rangle + e^{i\omega t} |x+\rangle \right)$$

und

$$P_{z+}(t) = |\langle z+|\psi(t)\rangle|^2 \underset{\langle z+|x\pm\rangle = 1/\sqrt{2}}{=} \frac{1}{4} \left| e^{-i\omega t} + e^{i\omega t} \right|^2 = \cos^2(\omega t)$$

$$P_{z-}(t) = 1 - P_{z+}(t) = 1 - \cos^2(\omega t) = \sin^2(\omega t)$$

$$\rightarrow \; \langle \mu_z \rangle_t = \mu_0 P_{z+}(t) - \mu_0 P_{z-}(t)$$

$$= \mu_0 \left(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) \right) = \mu_0 \cos(2\omega t).$$

μ_x ist wegen $[H, \hat{\mu}_x] = 0$ Erhaltungsgröße

$$\rightarrow \; \langle \mu_x \rangle_t = \langle \mu_x \rangle_0 = \langle \mu_x \rangle_{|z+\rangle} = 0.$$

1b) Der zeitentwickelte Zustand $|\psi_0\rangle$

lautet $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iEt/\hbar}|\varphi_0\rangle + e^{-i(E+\hbar\omega)t/\hbar}|\varphi_1\rangle\right)$

$$= \frac{e^{-iEt/\hbar}}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_0\rangle + e^{-i\omega t}|\varphi_1\rangle\right)$$

→ nach Zeit t ungestörtes System mit

Wkt. $p(t) = |\langle\psi_0|\psi(t)\rangle|^2$

$$= \frac{1}{4}|1 + e^{-i\omega t}|^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\omega t)$$

im Ausgangszust. $|\psi_0\rangle$.

Szenario I: $p_I(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\omega T)$

Szenario II:

$$p_{II}(T) \geq q_N(T) = (p(\Delta t))^N = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega T}{N}\right)\right)^N$$

für $N \gg \omega T$ ist $\cos\left(\frac{\omega T}{N}\right) \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega T}{N}\right)^2$

$$\rightarrow \quad q_N(T) = \left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\omega T}{N}\right)^2\right)^N$$

$$\rightsquigarrow \quad q_N(T) = \Big(\underbrace{1 - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{\omega T}{N}\right)^2}_{\simeq\, e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega T}{N}\right)^2}}\Big)^N \simeq e^{-\frac{1}{4}\frac{\omega^2 T^2}{N}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$$

also im Grenzfall $N \to \infty$

$$P_{II,N}(T) \geq q_N(T) = 1$$

D. h. durch die wiederholten idealen Messungen in Sz. II verbleibt das System im Zustand $|\Psi_0\rangle$, während in Sz. I die Aufenthaltswkt. im Zustand $|\Psi_0\rangle$ mit T zwischen 0 und 1 oszilliert:

"Quantum Watch-Dog Effect"