gestern: Impuls in der QM

- H = Generator der Zeitentwicklung $U(t)$,

d.h. $\boxed{U(t) = e^{-iHt/\hbar}}$

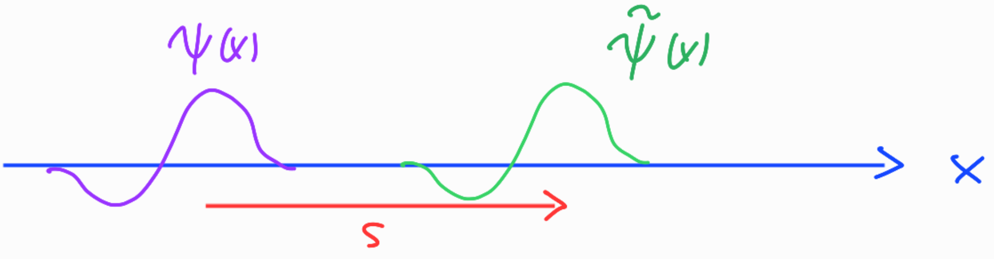
$\rightarrow$ $\boxed{H \overset{!}{=} i\hbar \frac{d}{dt} U(t) \Big|_{t=0}}$

- Impuls $\hat{p}$ = Generator der Translation $T(s)$

d.h. $\boxed{\hat{p} := i\hbar \frac{d}{ds} T(s) \Big|_{s=0}}$ und $\boxed{T(s) = e^{-i\hat{p}s/\hbar}}$

Translation: $T(s)\,|\varphi_x\rangle := |\varphi_{x+s}\rangle$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ccc} |\psi\rangle & \xrightarrow{T(s)} & |\tilde{\psi}\rangle = T(s)\,|\psi\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi(x) & \longrightarrow & \tilde{\psi}(x) = \psi(x-s) \end{array}$$



Impulsoperator in Ortsdarstellung:

$$\boxed{\begin{tikzcd} |\psi\rangle \arrow[r, "\hat{p}"] \arrow[d] & |\tilde{\psi}\rangle = \hat{p}\,|\psi\rangle \arrow[d] \\ \psi(x) \arrow[r, "-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}"] & \tilde{\psi}(x) = -i\hbar\,\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \end{tikzcd}}$$

Rechnung:

$$\tilde{\psi}(x) = \langle \varphi_x | \tilde{\psi}\rangle = \langle \varphi_x | \hat{p} | \psi\rangle \overset{\text{Def}}{=} \langle \varphi_x | \, i\hbar \frac{d}{ds} T(s)\Big|_{s=0} \, |\psi\rangle$$

$$= i\hbar \frac{d}{ds} \underbrace{\langle \varphi_x | T(s) | \psi\rangle}_{= \psi(x-s)}\Big|_{s=0} = i\hbar \frac{d}{ds} \psi(x-s)\Big|_{s=0}$$

$$= -i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$$

Kurz:

$$\boxed{\hat{p} \;\hat{=}\; -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}$$

Ortsoperator in Ortsdarstellung:

$$\begin{tikzcd} |\psi\rangle \arrow[r, "\hat{x}"] \arrow[d] & |\tilde{\psi}\rangle = \hat{x}\,|\psi\rangle \arrow[d] \\ \psi(x) \arrow[r] & \tilde{\psi}(x) = x\,\psi(x) \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\hat{x} \;\hat{=}\; x.}$$

Rech.:

$$\tilde{\psi}(x) = \langle \varphi_x | \hat{x} | \psi\rangle = \langle \varphi_x | \underset{\in \mathbb{R}}{x} | \psi\rangle = x \underbrace{\langle \varphi_x | \psi\rangle}_{\psi(x)}$$

Impulserwartungswert im Zust. $|\psi\rangle$ mit Wellenfkt. $\psi(x)$

$$\langle p\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\, \psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)$$

$$\langle p^2\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle = \int dx\, \psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi(x)$$

Ortserwartungswert.

$$\langle x\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, x\, \psi(x)$$

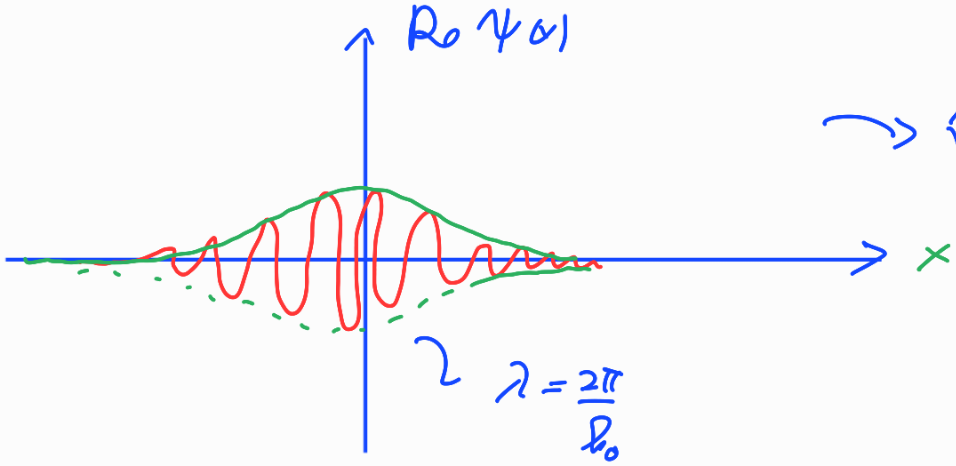
Bsp.: Zustand $|\psi\rangle$ mit Wellenfkt.

$$\psi(x) = c\, e^{ik_0 x}\, e^{-x^2/4\sigma^2} \quad ; \quad c = (2\pi\sigma^2)^{-1/4}$$

$$\rightarrow \langle p\rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} dx\, \psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)$$

NR: $$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = ik_0\psi(x) - \frac{x}{2\sigma^2}\psi(x)$$

$$\rightarrow \langle p\rangle_\psi = \hbar k_0 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx\, |\psi(x)|^2}_{=1} + \frac{i\hbar}{2\sigma^2}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx\, x|\psi(x)|^2}_{=0} = \hbar k_0$$



$\rightarrow \langle p \rangle_\psi = \hbar k_0$

<u>Ort - Impuls - Kommutator:</u>

$$\boxed{[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{H}}}$$

[

- $$\underbrace{[\hat{x}, T(s)]}_{\hat{x}T(s) - T(s)\hat{x}} = s\,T(s) \qquad (*)$$

$$[\hat{x}, T(s)]\,|\varphi_x\rangle = \underbrace{\hat{x}\,|\varphi_{x+s}\rangle}_{(x+s)|\varphi_{x+s}\rangle} - T(s)\,\hat{x}\,|\varphi_x\rangle$$

$$= (\cancel{x}+s)\,T(s)|\varphi_x\rangle - \cancel{x\,T(s)|\varphi_x\rangle} = s\,T(s)\,|\varphi_x\rangle$$

- $$[\hat{x}, \hat{p}] = \left[\hat{x}, i\hbar \frac{d}{ds} T(s)\Big|_{s=0}\right] = i\hbar \frac{d}{ds}[\hat{x}, T(s)]\Big|_{s=0}$$

$$\overset{(*)}{=} i\hbar \frac{d}{ds}\left(s\,T(s)\right)\Big|_{s=0} = i\hbar\mathbb{1}$$

]

alternativ:

$$\langle \varphi_x | [\hat{x}, \hat{p}] | \psi \rangle = x\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) x\psi(x)$$

$$= \cdots = i\hbar\, \psi(x) = \langle \varphi_x | i\hbar | \psi \rangle \,.$$

<u>Zusammenfassung:</u>

- $\hat{p} := i\hbar \frac{d}{ds} T(s)\Big|_{s=0}$
- $T(s) = e^{-i\hat{p}s/\hbar}$
- $\hat{p} \mathrel{\hat{=}} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
- $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$
- $\hat{p} = \hat{p}^{+}$

$\hookrightarrow$ Eigenzustände / -werte des Impulsoperators.

<u>zweckmäßig:</u> Impulseigenwert $p = \hbar k$

zum Eigenzustand $|\chi_k\rangle$ $\longrightarrow$

Eigenwertgl.:
$$\hat{p}\,|\chi_k\rangle \overset{!}{=} \hbar k\,|\chi_k\rangle$$

Ortsdarstell.:
$$\left(-i\cancel{\hbar}\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi_k(x) = \cancel{\hbar} k\,\chi_k(x)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\chi_k(x) = ik\,\chi_k(x)$$

$\rightarrow$ Lösung: $\quad \chi_k(x) = e^{ikx}$

$\rightarrow$ "Zustand" $|\chi_k\rangle$ mit Wellenfkt

$\chi_k(x) = e^{ikx}$ $\left(= \langle \varphi_x | \chi_k \rangle \right)$ ist

Eigenzustand des Impulsoperators $\hat{p}$

zum EW $p = \hbar k$, für $k \in \mathbb{R}$

<u>Satz</u>: Das System der Impulseigenzustände

$\{ |\chi_k\rangle \}_{k\in\mathbb{R}}$ ist orthogonal

und vollständig im folgenden Sinn:

$$\boxed{\begin{aligned} &(i) \quad \langle \chi_k | \chi_{k'} \rangle = 2\pi\, \delta(k-k') \\ &(ii) \quad \int \frac{dk}{2\pi}\, |\chi_k\rangle\langle\chi_k| = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \end{aligned}}$$

(Orthonormalität)

(Vollständigkeit)

⌈ Erinnerung: • $\langle \varphi_x | \varphi_{x'} \rangle = \delta(x-x')$

• $\int dx\, |\varphi_x\rangle\langle\varphi_x| = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ ⌋

<u>c) Impulsdarstellung</u> $\hat{=}$ "Welle – Teilchen-Dualismus"

Impulsdarstellung eines Teilchenzustands $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} |\psi\rangle = \int \frac{dk}{2\pi}\, |\chi_k\rangle \underbrace{\langle\chi_k|\psi\rangle}_{\overset{!!}{=}\, \tilde{\psi}(k)}$$

mit Impulswellenfkt.

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\psi}(k) &:= \langle \chi_k | \psi \rangle \\ \text{ist} \quad |\psi\rangle &= \int \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{\psi}(k)\, |\chi_k\rangle \end{aligned}}$$

Ortsdarstellung:

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}_x \, |\psi\rangle = \int dx \, |\varphi_x\rangle \underbrace{\langle\varphi_x|\psi\rangle}_{\psi(x)} = \int dx \, \psi(x) \, |\varphi_x\rangle$$

$$\boxed{\int \frac{dk}{2\pi} \, \tilde{\psi}(k) \, |\chi_k\rangle = |\psi\rangle = \int dx \, \psi(x) \, |\varphi_x\rangle}$$

Überlagerung von Impuls (≙ Wellen)-Zuständen $|\chi_k\rangle$

Überlagerung von Orts (≙ Teilchen) Zuständen $|\varphi_x\rangle$

Zu klären:

$$\begin{tikzcd}
 & |\psi\rangle \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\tilde{\psi}(k) \arrow[rr, leftrightarrow, "F.T."] & & \psi(x)
\end{tikzcd}$$

denn:

$$\psi(x) = \langle\varphi_x|\psi\rangle = \langle\varphi_x| \overbrace{\int \frac{dk}{2\pi} |\chi_k\rangle\langle\chi_k|}^{\mathbb{1}} \psi\rangle$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} \underbrace{\langle\varphi_x|\chi_k\rangle}_{e^{ikx}} \underbrace{\langle\chi_k|\psi\rangle}_{=\tilde{\psi}(k)}$$

d.h.

$$\boxed{\underline{\underline{\psi(x)}} = \int \frac{dk}{2\pi}\, \underline{\underline{\hat{\psi}(k)}}\, e^{ikx}}$$

andererseits:

$$\hat{\psi}(k) = \langle \chi_k | \psi \rangle = \langle \chi_k | \overbrace{\left(\int dx\, |\varphi_x\rangle\langle\varphi_x| \right)}^{=\mathbb{1}_x} \psi \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx\, \underbrace{\langle \chi_k | \varphi_x \rangle}_{e^{-ikx}}\, \underbrace{\langle \varphi_x | \psi \rangle}_{\hat{=}\, \psi(x)}$$

$$\boxed{\tilde{\psi}(k) = \int dx\, \psi(x)\, e^{-ikx}}$$